

2047

## 北方交通大学 2003 年硕士研究生入学考试试卷

16

考试科目: 313 数学分析

共 3 页 第 1 页

注意事项: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上的不予装订和评分。

## 一. 计算题: (每 7 分)

(1) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n}$ , (2) 求  $(x \sin x)^{(n)}$ , (3) 求  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$ ,

(4) 求  $\int \arcsin x dx$ , (5) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ ,

(6) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  的收敛区间与和函数,

(7) 求曲面  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$  在点  $P(u_0, v_0)$  的切平面方程,

(8) 求第二型曲面积分  $\oiint_S z^3 dx dy$ , 其中  $S$  是椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的  $z > 0$  的部分, 外法线是正向,

(9) 求  $\text{rot}(\text{grad } f(x, y, z))$ , 其中  $f(x, y, z)$  对所有变量有连续的二阶偏导数 (包括混合导数),

(10) 将函数  $f(x) = x$  在  $(-\pi, \pi]$  展成傅立叶级数。

## 二. 证明题:

(1) 证明  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 。(10 分)

(2) 利用任何单调数列一定有极限这一定理证明如果非空实数集合  $A$  有上界则一定有上确界。(15 分)

(3) 证明有界闭区间  $[a, b]$  上的单调有界函数  $f(x)$  在此区间上

## 北方交通大学 2003 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目: 313 数学分析

共 3 页 第 2 页

注意事项: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上的不予装订和评分。

定积分一定存在。(10 分)

(4) 对于正项数列  $\{a_n\}$ , 如果有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a, a > 0$ , 证明必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a. \quad (15 \text{ 分})$$

## 三. 综合题:

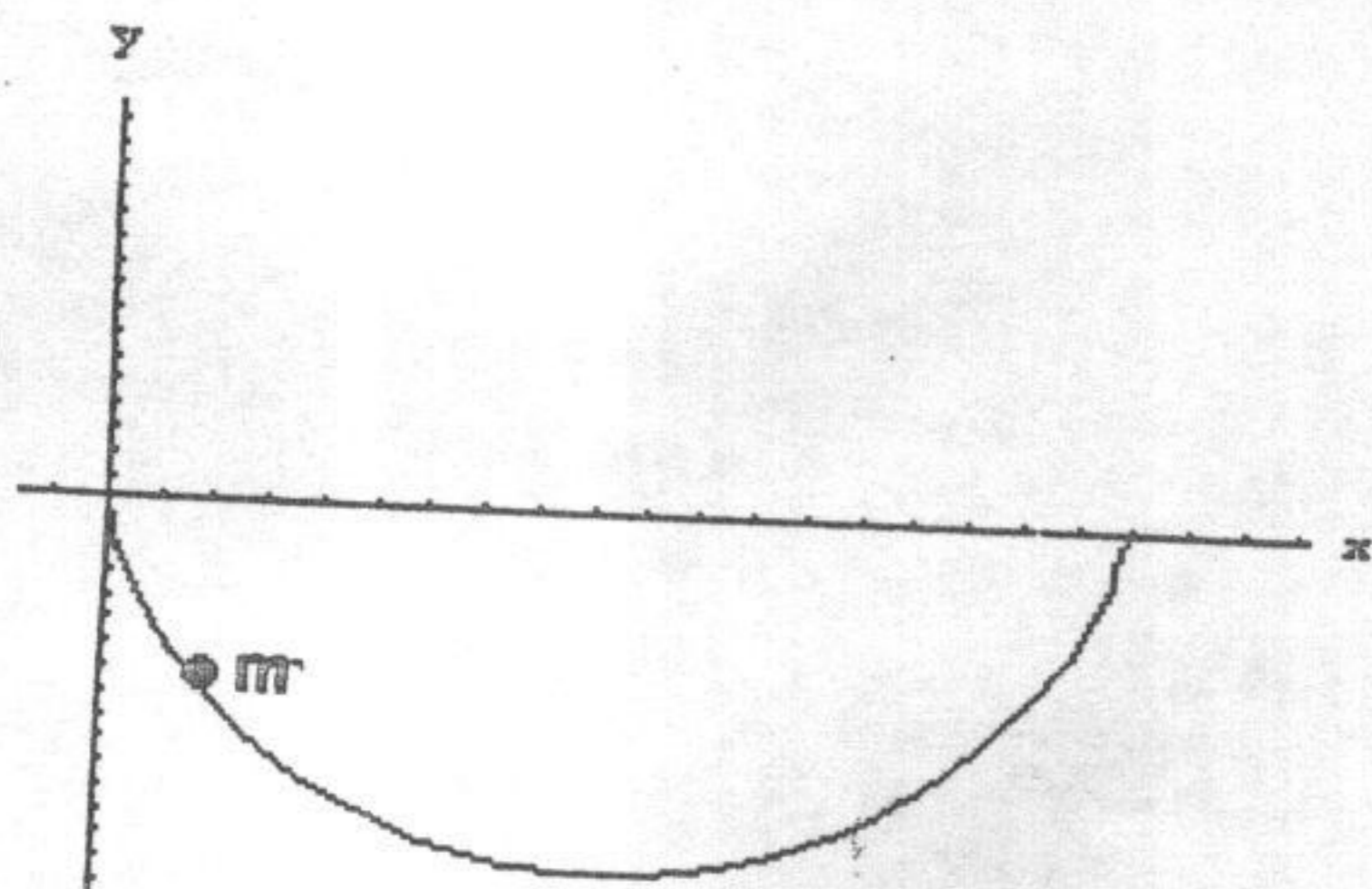


图 1

图 1 为一条摆线, 其参数方程为

$$x = a(\tau - \sin \tau), y = a(\cos \tau - 1), \tau \in [0, 2\pi]$$

$a$  是一个正的常数,  $y$  轴的方向与引力方向相反。在  $t=0$  时由初始点

$$x_0 = a(\tau_0 - \sin \tau_0), y_0 = a(\cos \tau_0 - 1), \tau_0 \in [0, \pi)$$

## 北方交通大学 2003 年硕士研究生入学考试试卷

科目: — 313 数学分析 —

共 3 页 第 3 页

注意事项: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上的不予装订和评分。

以零初始速度出发的质点 (质量为  $m$ ) 在地表面万有引力的作用下沿该摆线光滑地摆动。试求

- (1) 该质点由初始点下滑到摆线最低点所需的时间 (设地表面附近引力加速度为常数  $g$ ) (20 分)
- (2) 证明质点的摆动周期与质点的初始位置无关 (10 分)