# 北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：470 电动力学 

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

提示：

（1）柱坐标系（$r$, $\theta$, $z$）下微分算子的表达式：

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)e_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)e_\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)e_z$$

（2）球坐标系（$r$, $\theta$, $\phi$）下微分算子的表达式：

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\cdot A_\phi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

（3）柱坐标系下拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi(r,\theta)=0$ 的通解为：

$$\varphi(r,\theta)=(A_0+B_0\ln r)(C_0+D_0\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nr^n+B_nr^{-n}\right)\left(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta\right)$$

*****************************************************************************

1. （10 分）麦克斯韦方程组：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

是对所有宏观电磁现象的精辟概括。

（1）试写出麦克斯韦方程组的积分形式；

（2）简述上述每一方程（微分形式）所包含的物理内容。

# 北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

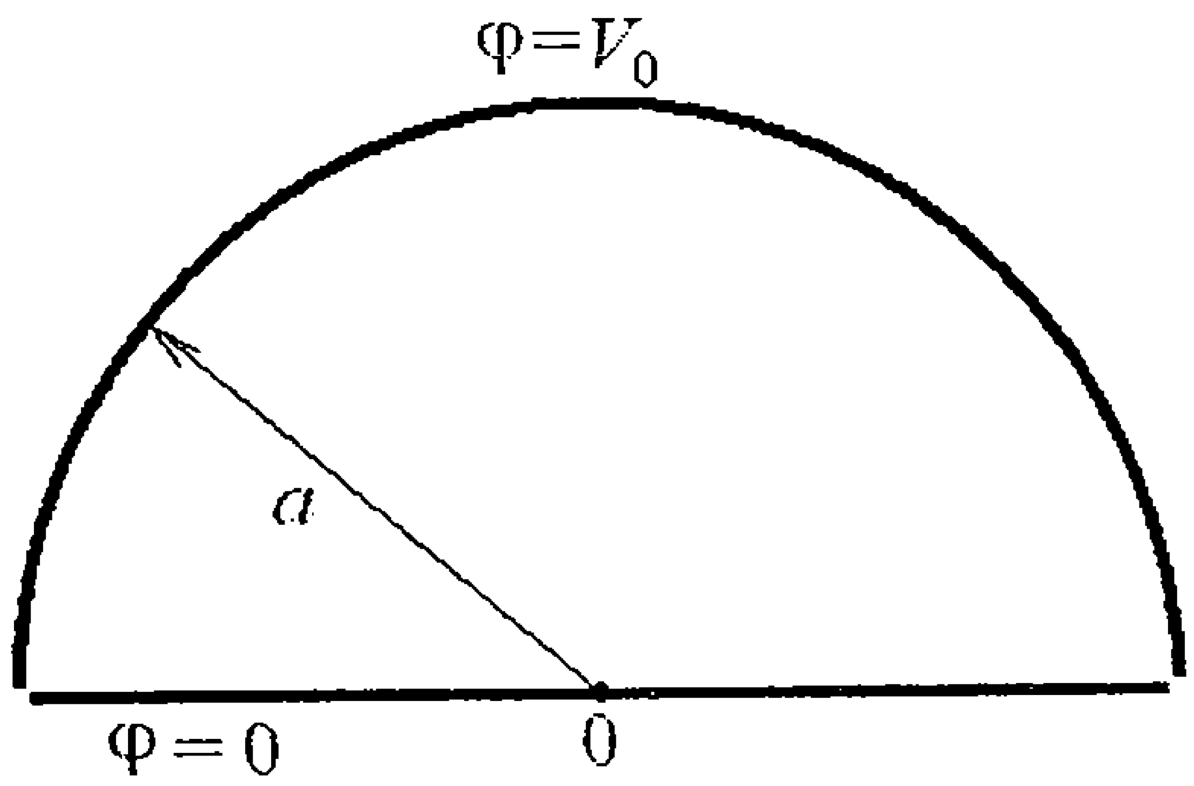
考试科目：470 电动力学　　　　共 6 页　第 2 页

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

2.（15 分）无限长导体管的横截面如图所示，圆弧部分的半径是 $a$，电势为 $V_0$，底部导体平板上的电势为 0。

（1） 试在柱坐标系下用分离变量法求管内电势分布；

（2） 计算园弧型导体管以及底部导体平板表面上的面电荷密度分布。




第 2 题图

3.（10 分）证明：

（1）对于任意标量场 $u$ 和矢量场 $\boldsymbol{F}$，下述等式成立：

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})=u\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla u\cdot\boldsymbol{F}\ ;\quad \nabla\times(u\boldsymbol{F})=u\nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla u\times\boldsymbol{F}$$

（2）对于体积 $V$ 内的静电场 $\boldsymbol{E}$，有：

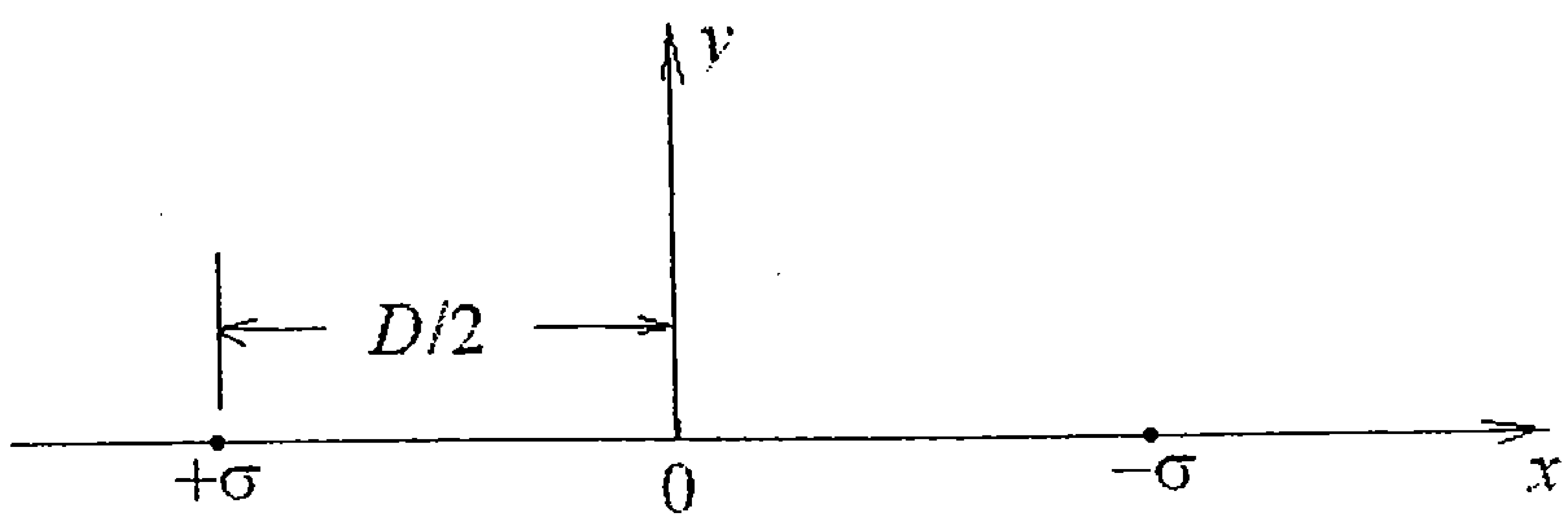
$$\int_V \boldsymbol{E}d\tau=-\oint_S\varphi\,d\boldsymbol{s}$$

其中 $\varphi$ 为电势函数，$S$ 为 $V$ 的表面，$d\boldsymbol{s}$ 的方向为所考察点处 $S$ 的外法线方向。

4.（10 分）空气中两条均匀带电的无限长平行直导线如图所示。电荷线密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$，导线间距离为 $D$。

（1）如果选择原点（如图）为电势参考点，求电势的空间分布。

（2）若导线直径为 $d$（<<$D$），求单位长度双导线的电容。



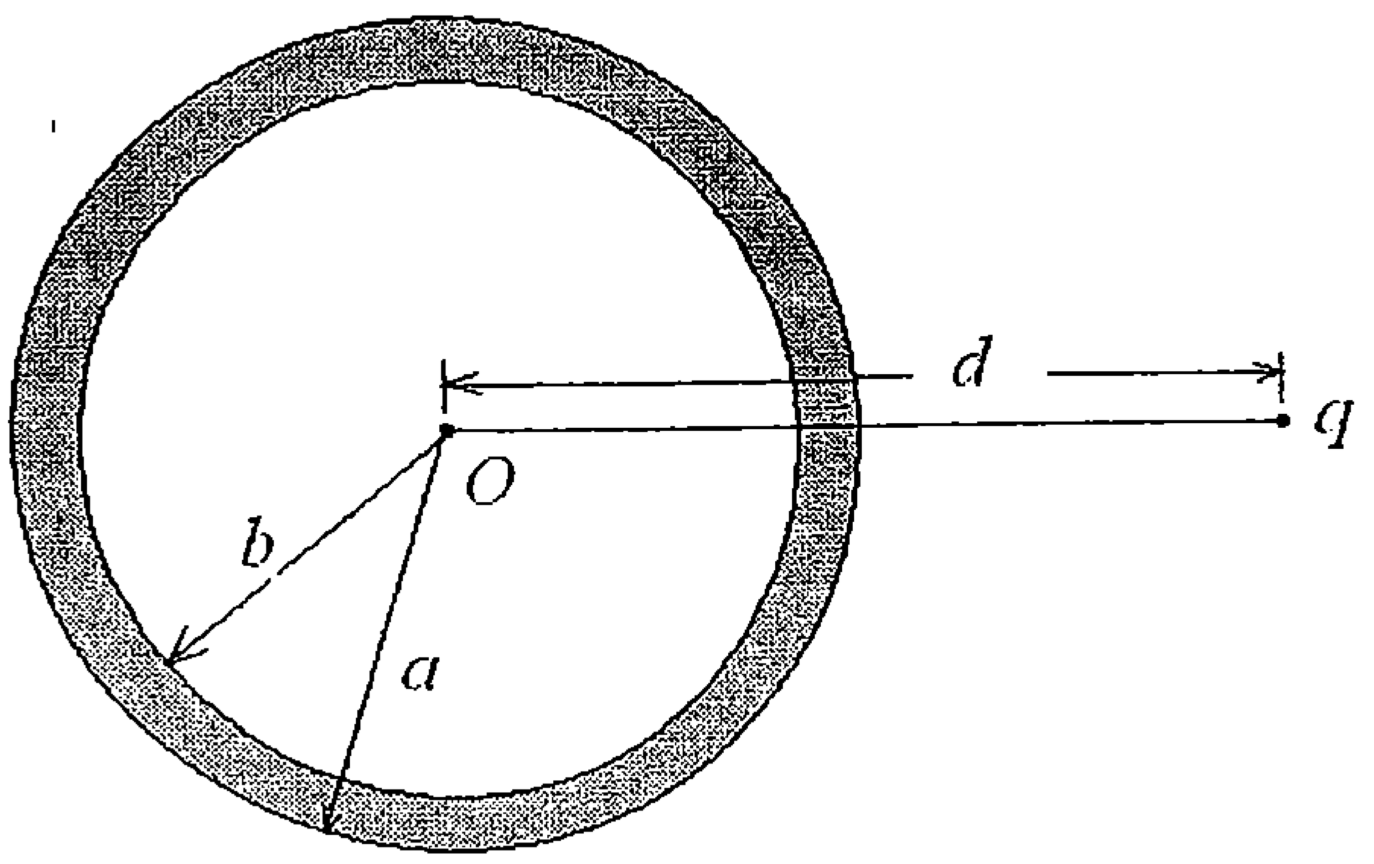

第 4 题图

# 北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷



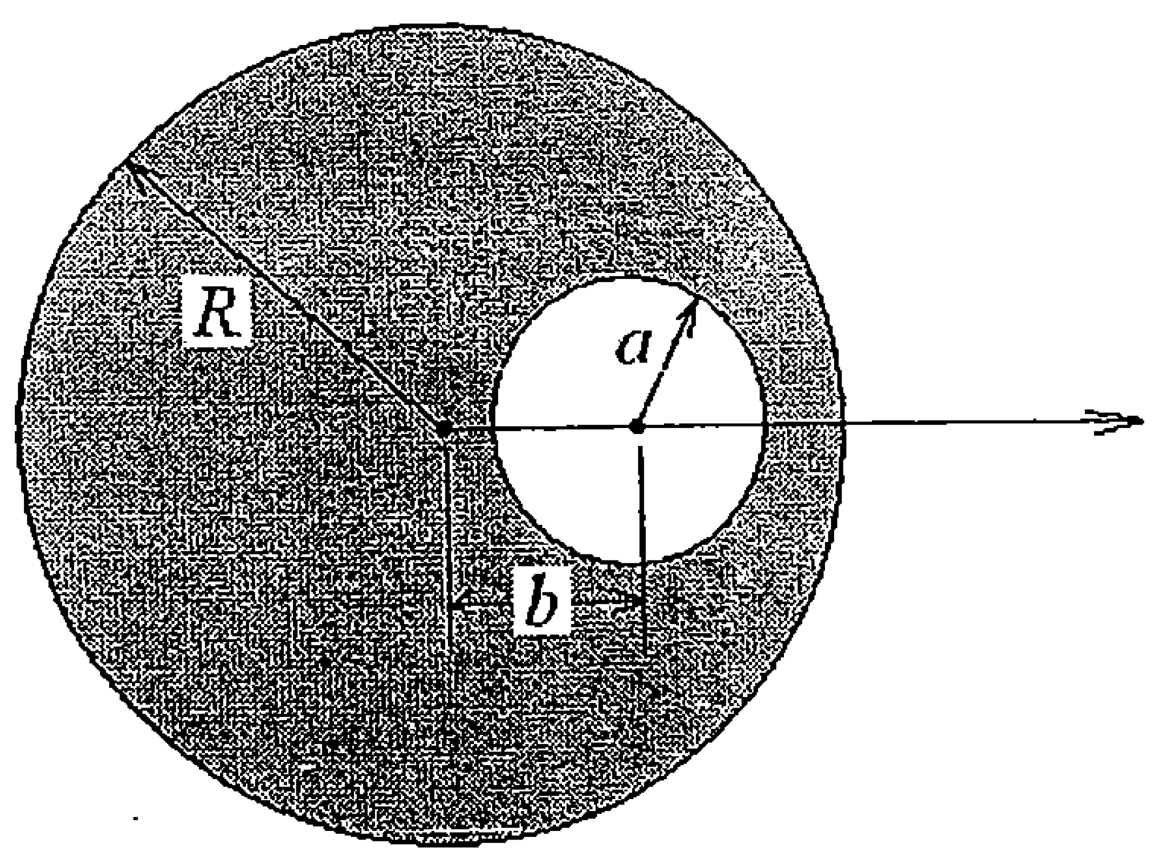
注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

5. （15 分）如图所示，一外半径为 $a$，内半径为 $b$ 的接地导体球壳，在导体壳外与球心相距 $d$（$d>a$）处有一点电荷 $q$。以无穷远处为电势参考点，求：
（1）球壳内外的电势分布；
（2）球壳内外表面上的面电荷密度分布。




第 5 题图

6. （15 分）一半径为 $R$ 的无限长直圆柱型中空导体的横截面如图所示，导体内圆柱型孔洞的半径为 $a$，两圆柱体轴线间距为 $b$。导体上有稳恒电流 $I$，且电流密度在导体横截面上均匀分布。求柱外空间各点的磁感应强度。




第 6 题图

# 北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：470 电动力学 

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

7. （15 分）如图(a)所示，一单色平面波 $\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_{i0}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r})}$ 入射到折射率分别为 $n_1$ 和 $n_2$ 的两种介质分界面上将发生反射和折射，反射波和折射波分别为 $\boldsymbol{E}_r=\boldsymbol{E}_{r0}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r})}$，$\boldsymbol{E}_t=\boldsymbol{E}_{t0}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}_t\cdot\boldsymbol{r})}$。证明：

(1) 入射角、反射角与折射角之间满足关系：$\theta_i=\theta_r$；$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r$；

(2) $\boldsymbol{k}_i$，$\boldsymbol{k}_r$ 和 $\boldsymbol{k}_t$ 三矢量共面；

(3) 对于如图(b)所示的垂直极化波，介质分界面的振幅反射与透射系数为：

$$r_\perp=\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\cos\theta_i-\left[n^2-\sin^2\theta_i\right]^{1/2}}{\cos\theta_i+\left[n^2-\sin^2\theta_i\right]^{1/2}};\quad t_\perp=\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i+\left[n^2-\sin^2\theta_i\right]^{1/2}}$$

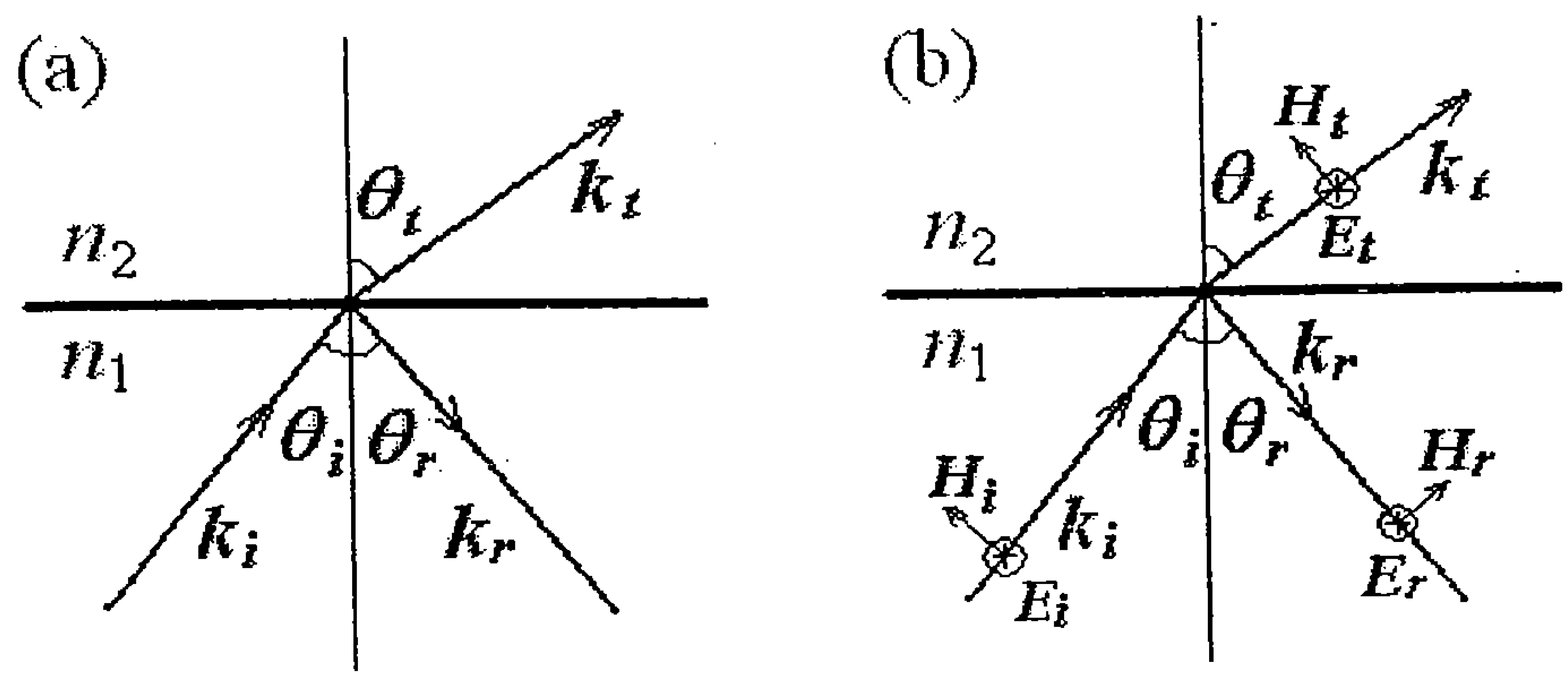
其中，$n=n_2/n_1$。

(4) 界面的反射率 $R$ 定义为反射波与透射波平均能流密度之间的比值，证明：

$$R=|r_\perp|^2$$

(5) 当入射角满足 $\sin\theta_i>n$ 时，证明：

$$r_\perp=e^{i\varphi},\quad \varphi=2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-(n_2/n_1)^2}}{\cos\theta_i}$$




第 7 题图

# 北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目：470 电动力学　　　　

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

8. （10 分）在柱坐标系下，任意沿 z 方向无限均匀的波导内传播的单色电磁波可以表述为：

$$\boldsymbol{E}(r,\theta,z,t)=\boldsymbol{E}(r,\theta)e^{i(\omega t-\beta z)},\quad \boldsymbol{H}(r,\theta,z,t)=\boldsymbol{H}(r,\theta)e^{i(\omega t-\beta z)}$$

证明：上述电磁场的横向分量可以用纵向分量（$E_z, H_z$）表示为：

$$E_r=\frac{i}{k_0^2n^2-\beta^2}\left[-\beta\frac{\partial E_z}{\partial r}-\frac{\omega\mu_0}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta}\right]$$

$$E_\theta=\frac{i}{k_0^2n^2-\beta^2}\left[-\frac{\beta}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta}+\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial r}\right]$$

$$H_r=\frac{i}{k_0^2n^2-\beta^2}\left[-\beta\frac{\partial H_z}{\partial r}+\frac{\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta}\right]$$

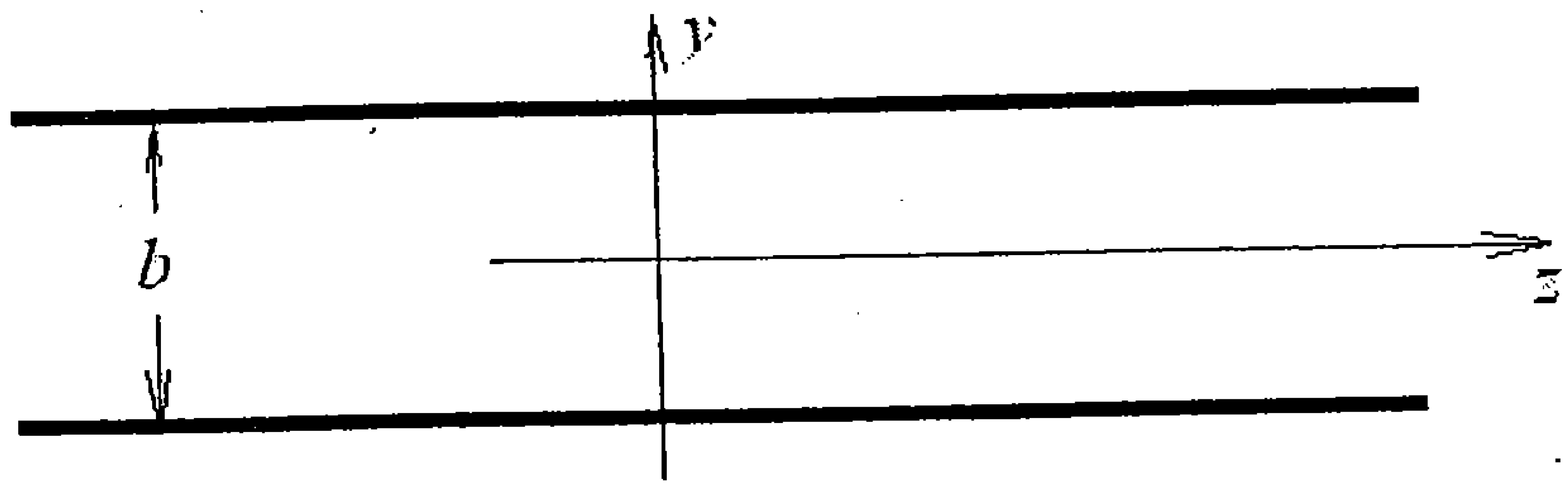
$$H_\theta=\frac{i}{k_0^2n^2-\beta^2}\left[-\frac{\beta}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta}-\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial r}\right]$$

其中，$k_0$ 为真空波数，$n=n(r,\theta)$为空间折射率分布。

9. （15 分）如图所示，一对无限大的平行理想导体平板相距为 $b$。对于在平板间沿 $z$ 方向传播的电磁波，求：

（1） 导体平板间各波模的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的分布；

（2） 各波模的截止频率。




第 9 题图

# 北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目： 470 电动力学 

注意事项：答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

10. （15 分）在真空中 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$。

（1） 分别导出在库仑规范和洛伦兹规范下，电磁场矢势和标势所满足的波动方程。

（2） 证明：在洛伦兹规范下，有限体积 $V$ 内随时间变化的电荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 在无限大自由空间中所产生的标量势为：

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\left(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}d\tau' \quad 其中 r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|。$$

11. （10 分）已知真空中一时谐电磁波可在球坐标系下用矢势表示为：

$$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{e}_r\frac{A_0\cos\theta}{r}-\boldsymbol{e}_\theta\frac{A_0\sin\theta}{r}\right]e^{-ikr}$$

求空间各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

12. （10 分）根据洛伦兹变换关系，若参考系 $\Sigma'(x',y',z',t')$ 相对于参考系 $\Sigma(x,y,z,t)$ 以速度 $v$ 沿 $x$ 轴正方向（与 $x'$ 的正方向相同）运动，则四维位置矢量 $x_\mu=(\boldsymbol{x},\ ict)$ 满足变换关系：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\ict\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\ict'\end{pmatrix}$$

其中：$\beta=v/c$，$\gamma=\left[1-(v/c)^2\right]^{-1/2}$。电磁场的四维势矢量定义为 $A_\mu=(\boldsymbol{A},\ i\varphi/c)$，据此证明：在真空中以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 $x$ 方向运动，带电量为 $q$ 的粒子在空间产生的电磁场矢势和标势分别为：

$$A_x=\frac{qv}{4\pi\varepsilon_0c^2(r-vx/c)}，\quad A_y=0，\quad A_z=0，\quad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-vx/c)}$$