10.27 已招

北京交通大学2007年硕士研究生入学考试试卷

考试科目： 444 高等代数　　　　共2页　第1页

注意事项： 答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

1．（10分）已知行列式 $P(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是互不相同的数，证明 $P(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式，并求出 $P(x)$ 的最高次项的系数和 $P(x)$ 的根.

2．（10分）求解矩阵方程 $XA=B$，

其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3．（10分）求多项式 $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ 在有理数域、实数域和复数域上的标准分解式.

4．（10分） 设列向量 $\alpha_1=(1,3,0,5)^T$，$\alpha_2=(1,2,1,4)^T$，$\alpha_3=(1,1,2,3)^T$ $\alpha_4=(1,1,2,3)^T$，$\alpha_5=(1,-3,6,-1)^T$，$\beta=(1,a,3,b)^T$，这里（　　　）^{T} 表示转置.

（1）求向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 的极大线性无关组；

（2）求向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta\}$ 的秩；

（3）令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，问 a,b 为何值时，线性方程组 $Ax=\beta$ 有解？在有解的情形时，求其全部解.

5．（10分）证明：如果 $(f(x),g(x))=1$，那么 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

6．（10分）如果 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n\geq 2$），A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\ 1, & R(A)=n\text{-}1\\ 0, & R(A)<n\text{-}1\end{cases},$$

这里 $R(A)$ 表示矩阵的秩.

7．（10分）设 A 为 n 阶实对称矩阵，证明必存在数 a 使得 $A+aI$ 为半正定而非正定，这里 I 表示 n 阶单位矩阵.

8．（10分）设 **A** 是秩数为 r 的 n 阶矩阵，证明有 n 阶矩阵 **B** 使得秩(**B**) = n-r，且 **AB** = **BA** = **0**。

北京交通大学 2007 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目： 444 高等代数　　　　共 2 页　第 2 页

注意事项： 答案一律写在答题纸上，写在试卷上的不予装订和评分！

9.（**10** 分）设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间，且 $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

（1） 证明 $\{\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\}$ 是 V 的一组基；

（2）若 $\alpha\in V$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标为 $(n,n-1,\cdots,2,1)$，

求 α 在基 $\{\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\}$ 下的坐标.

10.（共 **20** 分，每小题 **10** 分）设有两个线性方程组

（I）：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

（II）：

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ bx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = c+1 \end{cases}$$

(1) 求(I)的通解；

(2) 当且仅当(II)中的参数 a, b, c 为何值时，(I)和(II)同解。

11.（共 **20** 分，每小题 **10** 分）

（1）用非退化线性替换将下面二次型化为标准形，并确定其秩和符号差：

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3$$
$$+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

（2）t 取什么值时，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$$

为正定的？

12. （共 **20** 分，每小题 **10** 分）在线性空间 P^n 中定义变换 σ：

$$\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,x_2,\cdots,x_n)$$

（**1**） 证明：σ 是 P^n 的线性变换.

（**2**）求值域 $\sigma(P^n)$ 及核 $\sigma^{-1}(o)$ 的基与维数.