05.5.18 王杏

# 北京航空航天大学

二〇〇一年
招收研究生　　题单号:493

## 高等代数 试题 （共2页）

**考生注意:全部答案必须写在答题册上,写在试题上的答案无效。**

（共十题,每题10分）

1. 设 $P(x)$ 是一个整系数多项式,又知 $P(0)$ 及 $P(1)$ 都是奇数,证明 $P(x)=0$ 没有整数根。

2. 求一个次数最低的多项式,使其被 $x^2+1$ 除余 $x+1$,被 $x^3+x^2+1$ 除余 $x^2-1$。

3. 用线性代数方法证明:若一个 $n$ 次多项式 $P(x)$ 在 $n+1$ 个互不相等的数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 处取值为0,则 $P(x)\equiv 0$。

4. 已知 $a\geqslant 0$,证明 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}\geqslant 0$$

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,试讨论向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_s+\alpha_1$ 的线性相关性。

6. 试证:任意满秩方阵 $A$ 可以表成一个正交阵 $Q$ 与一个正定阵 $P$ 的乘积。

7. 设方阵 $A$ 的特征值全为0,证明一定存在一个自然数 $k$,使 $A^k=0$。

8. 设 $A$ 及 $B$ 均为正定阵。证明 $AB$ 的特征值均大于0。

9. 试证 $n$ 维($n>2$)实线性空间 $V$ 的一个线性变换 $\mathscr{A}$，必有 1 维或 2 维的不变子空间。

10. 设 $f$ 是 $n$ 维欧氏空间 $E^n$ 上的一个线性函数，试证有唯一的向量 $\beta\in E^n$，使对任意 $\alpha\in E^n$，有 $f(\alpha)=(\alpha,\beta)$，其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示内积。