

北京师范大学

一九九八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专 业: 理论物理 凝聚态光学, 物理教学论, 天体物理学

研究方向: 以上各专业各研究方向

考试科目: 量子力学

共3页 第1页

以下公式仅供参考, 并非完全必要。

1. 氢原子的波函数:

$$\varphi_{100} = R_{10} Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

$$\varphi_{210} = R_{21} Y_{10} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \cos\theta,$$

$$\varphi_{211} = R_{21} Y_{11} = \frac{-1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \sin\theta \exp(i\phi),$$

$$\varphi_{21-1} = R_{21} Y_{1-1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \sin\theta \exp(-i\phi)$$

2. 直角坐标变量与球坐标变量间的关系:

$$x = r \sin\theta \cos\phi = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} r [Y_{11}(\theta, \phi) - Y_{1-1}(\theta, \phi)]$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}} r [Y_{11}(\theta, \phi) + Y_{1-1}(\theta, \phi)]$$

3. 积分公式:

$$\int_0^\infty x^p \exp(-qx) dx = q^{-(p+1)} p!$$

本试卷共四大题, 满分为 100 分

一。(共 40 分, 每小题 10 分)

1. 设氢原子于 $t=0$ 时分别处于下列状态: a) φ_{100} , b) φ_{210} ,
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{211} + \varphi_{21-1})$, 求相应的 t 时刻的波函数。

2. 一个一维量子系统的哈密顿 $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}(x)$, 求动能 $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$ 的平均值随时间的变化率 $\frac{d\bar{T}}{dt}$. 讨论你的结果与经典力学功-能定理间的关系。

3. 在讨论原子与光的相互作用时, Einstein 利用热力学体系的平衡关系得到下式:

$$N_m[A_{mk} + B_{mk}I(\omega_{mk})] = N_k B_{km}I(\omega_{mk})$$

指出上式中各量的物理意义。

4. 什么是简单(正常) Zeeman 效应? 写出与其相应的哈密顿量, 并且指出系统的守恒量有哪些?

二。(20 分)

一个电荷为 q 的一维简谐振子处在均匀外电场 E 中, 势可表为

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - qEx$$

1. 求该体系能量的本征值和本征函数, 假设无外电场时简谐振子的本征函数为 $\{\varphi_n(x)\}$;

2. 选取一个特殊的电场 E 的值, 可使该体系基态能量为零。这是否意味着此时零点能已不复存在?

3. 求坐标 \hat{x} 和动量 \hat{p} 在任一本征态的平均值。

三。(20分)

在计算氢原子的一级 Stark 效应时,通常选取电场沿着 Z 方向,因而 $\hat{H}' = e\mathcal{E}z$ 。基态能级不分裂而第一激发态能级发生分裂。

1. 若电场沿着任意方向, $\hat{H}' = e\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} = e(\mathcal{E}_x x + \mathcal{E}_y y + \mathcal{E}_z z)$ 此时氢原子的基态能级会分裂吗?

2. 通过具体计算,检验你的分析结果;

3. 设想电场沿着 x 方向, $\hat{H}' = e\mathcal{E}x$ 第一激发态能级的分裂情况与 $\hat{H}' = e\mathcal{E}z$ 时是否相同? 试通过计算得出具体结果。

四。(20分)

单电子的自旋 z 分量 \hat{S}_z 的本征函数为:

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. 写出两个电子系统的自旋单态波函数 Ψ 。

2. 设空间有两个特定的方向 \vec{a} 和 \vec{b} , 它们的夹角为 θ , $\hat{S}_a(1)$ 是第一个电子自旋的 \vec{a} 分量算符, $\hat{S}_b(2)$ 是第二个电子自旋的 \vec{b} 分量算符。求证: $\hat{S}_a(1)\hat{S}_b(2)$ 在态 Ψ 的平均值

$$\langle \Psi | \hat{S}_a(1)\hat{S}_b(2) | \Psi \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \cos \theta$$