

一. (48 分) 求解下列方程 (每小题 12 分)

1.  $y' = -\frac{x+y^2}{x^2+y},$

2.  $y'' - 4xyy' + 8y^2 = 0,$

3.  $x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{x+1},$

4. 求解初值问题

$$\begin{cases} x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z, \\ \text{当 } x = 2 \text{ 时, } z = y - 4. \end{cases}$$

二. (10 分) 证明方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  具有形状  $\mu = \mu[\phi(x, y)]$  的积分因子的充要条件为

$$\left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \left( N \frac{\partial \phi}{\partial x} - M \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^{-1} = f[\phi(x, y)],$$

并求出这个积分因子.

三. (15 分) 求解微分方程  $\frac{dy}{dx} = |y|^\alpha$  ( $0 < \alpha < +\infty$ ), 并画出积分曲线草图.

四. (15 分) 设  $n \times n$  矩阵函数  $A(x)$  和  $n$  维向量函数

$f(x)$  在  $(a, b)$  上连续, 试证明柯西问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b) \end{cases}$$

的解在  $(a, b)$  上存在且唯一.

五. (12 分) 如  $a_i(x), 0 \leq i \leq 3$ , 在  $(a, b)$  上连续. 设  $y(x)$  是

$$y^{(4)} + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

的一个解, 且在区间  $[a_1, b_1]$  上有无穷多个零点,  $a < a_1 < b_1 < b$ . 求证, 在区间  $(a, b)$  上  $y(x) \equiv 0$ .