1999 年北京师范大学高等代数考研试题

(一) 判断下述变换哪些是线性变换，哪些不是，并说明理由：

(1) 在域F上的线性空间V中，$\sigma(\alpha)=k\alpha+\beta$，其中$k$是F中的固定元素，$\beta$是V中的固定非零向量.

(2) F是数域，在F^3中，$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3,-4x_2,x_3^2)$.

(3) 在$F[x]$中，$\sigma(f(x))=f(x+a)$，a是F中一个固定元素.

(4) 在$F[x]$中，$\sigma(f(x))=f(a)$，a是F中一个固定元素.

(5) 在$M_n(F)$中，$\sigma(X)=BXC$ 其中$B,C\in M_n(F)$是固定矩阵.

(6) 把复数域分别看作实数域和复数域上的线性空间，$\sigma(z)=\bar{z}$.

二. (1) 在复数域和实数域上将 x^5+1 分解成不可约多项式的乘积.

(2) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是整数，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=2$，证明 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+2$ 在有理数域上不可约.

三. 令 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，(1) 求 $\lambda I-A$ 的不变因子和初等因子，其中 I 是三阶单位阵.

(2) 求 A 的若当标准型.

四. 令实二次型 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=X'AX$，其中 $A=A'=(a_{ij})_{n\times n}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 设 λ 与 μ 分别是 A 的最大与最小特征根，则对于任意的 n 个实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，均有

$$\mu(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\le(b_1,b_2,\cdots,b_n)A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$
$$\le\lambda(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

五、设V和V'都是域F上的有限维线性空间，σ是V到V'的一个线性映射

证明：(1) 存在直和分解 $V=U\oplus W$，$V'=M\oplus N$，使 $\ker\sigma=U$，且 $W\cong M$

(2) 存在V的一个基和V'的一个基，使得σ在这对基下的矩阵形如

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 I_r 是r阶单位阵.

（每题二十分）