1999年北京师范大学数学分析考研试题

1. (1) 试证：数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right\}$ 收敛.

(2) 记 $C_0 \triangleq \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right\}$. 试证：

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+p}}-\frac{1}{p}\right)=C_0. \qquad (14分)$$

2. 求最小的 β 和最大的 α，使所有的自然数 n 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}. \qquad (14分)$$

3. 设 $f(x)$ 在实轴上有界且连续可微，并满足

$|f(x)+f'(x)|\le 1,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

试证：$|f(x)|\le 1,\ x\in(-\infty,+\infty)$. (14分)

4. 设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$.

试证：(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 内有且仅有一个根.

(2) 设 $x_n\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}.$$ (15分)

5. 计算：

$$f(y)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx.$$

(此处，$-\infty<y<\infty$。(计算过程要理由)) (14分)

6. 设函数 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微，$g(0)=0$。

试证：

$$\int_0^a|g(x)g'(x)|\,dx\leq\frac{a}{2}\int_0^a|g'(x)|^2\,dx.$$

其中等号成立当且仅当 $g(x)=Cx$ (C为常数) 时成立。 (15分)

7. 给定积分 $I=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$.

作正则变换 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$。区域 D 变成 Ω。如果变换满足：

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}.$$

试证：

$$I=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]du\,dv$$ (14分)

(完)