

专业:  
研究方向:

科目代码: 354  
考试科目: 高等数学(物元元)

### 一、求极限 (每小题 6 分, 共 12 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

### 二、求导数 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设  $y = f(e^x)$ , 求  $y''$ .

2. 设  $y = y(x)$  由方程  $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$  所确定, 求  $dy$ .

3. 设  $z = \frac{1}{x} f(xy) + x f(x+y)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

### 三、求积分 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. 求  $\int e^{\sin x} \sin x \cos x dx$ .

2. 求  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x^2 + y^2 \leq 1$  及  $y \geq |x|$  所围成的平面图形.

3. 求  $z = x^2 + y^2$  及  $y + z = 2$  所围立体的体积.

4. 求  $\int_L (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds$ , 其中  $L$  为  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

四、(8 分) 求微分方程  $y'' + 2y' + y = xe^x$  满足  $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$  的解.

五、(8 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$  的收敛区间及和函数.

六、(10 分) 将  $f(x) = e^x (-\pi \leq x \leq \pi)$  展开成傅立叶级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$  的和.

七、(10 分) 证明函数  $z = 4 - ye^{\cos x} - y^2$  有无穷多个极大值但无极小值.

八、(10 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数, 且  $f(a) = f(b) = 0, f(c) < 0 (a < c < b)$ . 证明: 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) > 0$ .