# 北京师范大学

## 2003 年招收攻度硕士学位研究生入学考试试题

专业：数学　　　　　　　　　　　　科目代码：325

研究方向：数学各专业　　　　　　　考试科目：数学分析

一、（15 分）设 $x_{n+1}=1+\frac{x_n^2}{1+x_n^2}$，$x_1=\alpha$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求它的极限。

二、（15 分）设 $\alpha=\sup\{f(x)\mid a\le x\le b\}$，证明存在 $a\le x_n\le b$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$ 成立。

三、（15 分）写出 $e^{\sin x}$ 在 $x=0$ 点展开的 Taylor 级数的前五项系数，并指出该级数的收敛区域。

四、（20 分）已知 $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+h^2(z)=1$ 确定，且 $h(z)$ 具有所需性质，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

五、（20 分）求下面曲面所围立体的体积，$z=xy$，$x+y+z=1$，$z=0$。

六、（20 分）将直角坐标系下的 Laplace 方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为极坐标系下的形式。

七、（10 分）设 $f(x)$ 在[0，1]上具有连续导函数，且 $f(1)=0$，证明函数级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n f(t)dt$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛。

八、（25 分）设 $f(x)$ 定义在实轴 $R$ 上，且 $f'(x)$ 在 $R$ 上连续。任取 $x_0\in R$，令 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=0,1,2,\ldots$，证明：

（1） 若 $|f'(x)|\le\frac{1}{2}, x\in R$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

（2） 若 $f(0)>0, f(x)\le M$ 且 $|f'(x)|<1,\ x\in R$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

九、（10 分）设 $\Gamma$ 是平面上过原点的光滑闭曲线，$C_\varepsilon$ 是以原点为圆心，半径为 $\varepsilon$ 的圆周，$\Gamma_\varepsilon$ 表示 $\Gamma$ 截取含在 $C_\varepsilon$ 中的曲线段后得到的曲线，求 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中取 $\Gamma_\varepsilon$ 的定向为正定向。