1999年中国人民大学概率论与数理统计（含线性模型）考研试题

一.（10分）两封信随机地投向标号为1，2，3，4的四个邮筒，问第二个邮筒恰好投入一封信的概率是多少？

二.（10分）在1500个产品中有400个次品，1100个正品，任取200个，问：(1)恰有90个次品的概率；(2)至少有2个次品的概率。

三.（10分）设随机变量(ξ,η)在矩形域$a\le x\le b$，$c\le y\le d$内服从均匀分布，试求：(1)联合概率密度及边缘概率密度；(2)ξ与η的联合分布函数。

四.（10分）设随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

问X与Y是否相关，是否独立？并证明你的结论。

五.（10分）在长为L的线段上任取两点，求两点间距离的数学期望与方差。

六.(25分) 假定大小为 n 的随机样本来自有如下密度的指数分布

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta},\quad 0<x<\infty,\quad 0<\theta<\infty.$$

(1) 找出 θ 的充分统计量，并说明理由.

(2) 求出 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$.

(3) 求出 θ 的矩估计 $\tilde{\theta}$.

(4) 求出上面估计量的方差.

(5) 验证上面的估计量是否是无偏的.

(6) 验证上述估计的方差是否达到 Cramér-Rao 不等式的下界.

七.(25分) 考虑下面检验问题(不用计算已给的数据):

(1) 如果 X 有 $N(\theta,1)$ 分布，作假设检验 $H_0: \theta=0$ 对备择检验 $H_1: \theta=1000$. 可以知道对于水平 $\alpha=0.05$ 的似然比检验如果 $X>1.645$，则会拒绝 H_0；而且按照 Neyman-Pearson 引理，该检验是最优的.

现在，如果我们观察到 $X=2.1$ 该水平 0.05 的最优检验告诉我们拒绝 $\theta=0$ 的零假设，并接受 $\theta=1000$ 的备择假设. 你觉得有问题吗? 问题在哪里! 如何解决?

(2) 我们有两组学生的成绩. 第一组为八名，成绩为 x_1: 99, 99, 100, 99, 99, 100, 99, 100；第二组为三名，成绩为 x_2: 75, 87, 60. 我们对这两组数据作同样的水平 $\alpha=0.05$ 的 t-检验(假设总体均值为 μ): $H_0: \mu=100$. $H_1: \mu<100$.

对第一组数据的结果为: $df=7$，t-值为 3.4157，单边的 p-值为 0.0056；结论为"拒绝 $H_0: \mu=100$. (注意：该组均值为 99.3750).

对第二组数据的结果为: $df=2$，t-值为 3.3290，单边的 p-值为 0.0398；结论为"接受 $H_0: \mu=100$ (注意：该组均值为 74.0000).

你认为该问题结论合理吗? 说出理由，并提出该如何解决

这一类问题.

(3) 写出上面所用的 t-检验统计量, 及 p-值的定义. 解释水平 $\alpha=0.05$ 的意义(注意, 这里是一般情况, 不要联系(2)中的具体数据例子). 如果, 没有给定水平, 如何用 p-值来作结论?

(4) 写出和 t-检验有关的关于均值 μ 的 $100(1-\alpha)\%$ 置信区间 (不要联系(2)中的数据; 请说明你所用的符号的意义(如果有的话)).

(5) 如果 $X_1,\cdots,X_n$ 有正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$; 这里 μ 未知. 写出关于均值 μ 的 $100(1-\alpha)\%$ 置信区间. 一般来说, 如果知道 $X_1,\cdots,X_n$ 有未知均值 μ 和已知方差 σ^2, 但分布不知道, 我们能不能用上面写的置信区间? 如果能, 需要什么条件? 根据什么? 用公式说明.

(6) 在(5)中, 如果置信区间不能大于某指定的宽度 B, 能否用选择 n 来达到目的, 用公式说明.