启用前机密　　　　北京大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学　　　　考试时间：2006 年 1 月 15 日上午

招生专业：理科各专业　　　　研究方向：

注意事项：答案必须答在答题纸上，答在试题上一律无效。填空题和单选题不必抄题目，但必须标明大题号和小题号，填空题写明答案（不要写计算过程），单选题写明选项。

11:16 – 11:30　　11:00 – 11:40

一、填空题（每小题 7 分，共 56 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^{x^2}-1}=$ $-\frac{1}{2}$.　$-\frac{1}{2}$

2. 若 $y=y(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数，则

$y'=$ $\frac{x+y}{x-y}$.　　$\dfrac{x+y}{x-y}$

3. 设 $f(x)$ 是个多项式，恰有 2 个极大值点和一个极小值点，则 $f(x)$ 是奇数次多项式还是偶数次多项式？ 偶（填奇或偶）；次数至少是 4 次。

$\int_0^2 dt\int_t^2 f(t)\,dx$

$\int_0^2 dx\int_0^x f(t)\,dt$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，并且是以 2 为周期的周期函数，还满足 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2$. 若 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则 $\int_0^2(xf(x)+F(x))\,dx=$ 4.

今天课堂上有

4

5. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt[3]{y}}^{1}\sqrt{1-x^4}\,dx=$ $\frac{1}{6}$　$\frac{1}{6}$

$0<y<1$

$\sqrt[3]{y}<x<1$

$y=x^3$

6. 设 $S$ 是正方体 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$ 的表面外侧，则曲面积分 $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=$ 3.

$\int_0^1 dx\int_0^{x^3}\sqrt{1-x^4}\,dy$

$\int_0^1\sqrt{1-x^4}\cdot x^3\,dx$

$\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx^4$

$\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1-t}\,dt$

7. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x^2e^x$ 的通解是 $y=cx^2+x^2e^x$；

$\begin{cases}\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=x^2e^x\\ y(1)=0\end{cases}$ 的特解是 $y=-ex^2+x^2e^x$

$=x^2(e^x-e)$

二、单选题（每小题6分，共24分）

$\int_0^x \ln t\,dt$　$t\ln t\big|_0^x - x$

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x\int_0^1 \ln(xt)\,dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

B

(A) 不连续；　　(B) 连续，但不可导；

(C) 可导，且 $f'(0)=0$；　　(D) 可导，但 $f'(0)\neq 0$.

$\lim_{x\to 0} x\int_0^1 \ln(xt)\,dt$

$=\cancel{\lim_{x\to 0}\int_0^1 \ln(xt)\,dt}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 \ln(xt)\,dt}{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{t}{xt}\cdot dt$

2. 曲线 $y=\begin{cases}x(x-1)^2, & 0\le x\le 1\\ (x-1)^2(x-2), & 1<x\le 2\end{cases}$ 在 $(0,2)$ 区间内

$\frac{1}{3}$

(A) 极值点个数2个，拐点个数2个；

(B) 极值点个数3个，拐点个数3个；

(C) 极值点个数3个，拐点个数2个；

(D) 极值点个数2个，拐点个数3个。 $\frac{2}{3}$，1，$\frac{4}{3}$

D

$\frac{1}{3}$ $\frac{5}{3}$

3. 沿椭圆 $x^2+4y^2=1$ 逆时针方向的曲线积分：$\oint_{x^2+4y^2=1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=$

A

(A) $\pi$；　　(B) $-2\pi$；　　(C) 0；　　(D) $2\pi$.

$\frac{1}{4}\oint_{4x^2+y^2=1}(xdy-ydx)$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(4x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2}$

$=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4x^2+y^2-x\cdot 8x}{(4x^2+y^2)^2}$

$=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$S_n \stackrel{定义}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} u_k$，则下列级数中一定收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + S_n)$; $\lim_{n\to\infty} u_n + S_n \neq 0$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$; $(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ C

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(S_n + S_{n-1})$; ✓ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$. $(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

三、(15 分)

1. 设 $x \geq 0$，求 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + x^{3n}}$；

$\frac{7}{16} + \frac{3}{32}\pi$ $\cancel{\frac{1}{2} + \frac{3}{32}\pi}$

$0 \leq x \leq 1$ 时 1

$x > 1$ 时 $x^3$

2. 若定义 $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + x^{3n}}$ $(x \geq 0)$，求 $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{(1+x^2)^3} dx$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\frac{3\pi}{32} + \frac{7}{24}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+x^n+x^{3n}}}{\sqrt[n]{x^{3n}}} = 1$

四、(15 分) 如图 1 所示


图 1

1. 求抛物线 $y^2 = 2x$ 在点 $A(2, 2)$ 处的法线方程；

2. 求此法线与该抛物线所围成区域的面积；$\frac{125}{12}$ $\frac{125}{12}$ $\int_{-3}^{2}\left(\frac{6-y}{2} - \frac{y^2}{2}\right)dy$

3. 求抛物线被此法线截出的弧长（$\widehat{AOB}$ 长度）.

$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{10}-3}\right) + \frac{1}{2}(2\sqrt{5} + 3\sqrt{10})$

$\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3\sqrt{10}) + \frac{1}{2}\ln[(\sqrt{5}+2)(\sqrt{10}+3)]$

五、(15 分) 设曲面 $z(x,y) = \arctan\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z = \frac{\pi}{4}$ 所围成的空间区域为 Ω（如图 2 所示）；

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dz \cdot \pi(\tan^2 z)$

$\pi - \frac{\pi^2}{4}$

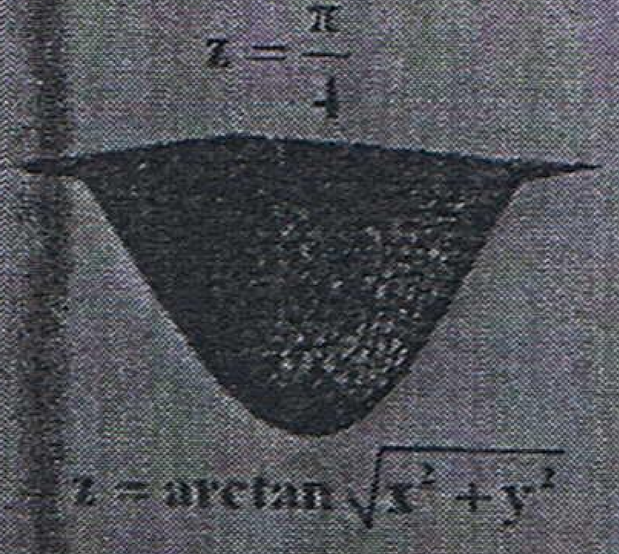


图 2

1. 求 Ω 的体积. $\iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\arctan\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{\pi}{4}} dz$

2. 求 Ω 的表面积. $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \ln\frac{\sqrt{5}+1}{2(\sqrt{2}+1)}\right]$ $+\pi$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

$z = \arctan x$ 绕 z 轴旋转而成 $\iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy$

$\int_0^1 2\pi \arctan x \sqrt{1 + \frac{1}{1+x^2}}\, dx$ $= \int_0^{2\pi} d\theta$ $\iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}}\, dxdy$

$= 2\pi \int_0^1 \arctan x \sqrt{1 + \frac{1}{1+x^2}}\, dx$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{(1+r^2)^2}}\, r dr$

$S = \iint ds$

$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\, d\sigma$

$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}}\, dxdy$

$= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{(1+r^2)^2+1}}{1+r^2}\, r dr$

$\pi\left(\sqrt{(1+r^2)^2+1} + \ln\frac{(r^2+1)}{\sqrt{(1+r^2)^2+1}+1}\right)\Big|_0^1$

六、（13分） 某厂为促销产品需作电视和报纸两种广告，当广告费用分别为 $x,y$（千元）时，销售量 $Q(x,y)=300+\dfrac{200x}{x+5}+\dfrac{100y}{y+10}$，所获利润

$$R(x,y)=\frac{Q(x,y)}{5}-(x+y).$$

$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=0\end{cases}$　$\dfrac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}=0$　$\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}=-\dfrac{400}{(x+5)^3}<0$　$\dfrac{\partial^2 R}{\partial y^2}=-\dfrac{400}{(y+10)^3}$　故极值．　极大值．

$\begin{cases}x=10\sqrt{2}-5\\ y=10\sqrt{2}-10\end{cases}$

1. 广告费用不限，当 $x,y$ 各为多少时利润最大？

$R(x,y)_{max}=135-40\sqrt{2}$

$B^2-AC<0$　$A<0$　最大

$P(x,y)=R(x,y)+\lambda(x+y-7)$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{200}{(x+5)^2}-1-\lambda=0$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{200}{(y+10)^2}-1-\lambda=0$

$\dfrac{\partial P}{\partial \lambda}=x+y-7=0$

$x=6$　$y=1$

$R(6,1)=60+\dfrac{240}{11}+\dfrac{20}{11}-7=76\dfrac{7}{11}$

2. 两类广告费共7千元，当 $x,y$ 各为多少时利润最大？

七、（12分） 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$．

1. 求证：$\begin{cases}S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x\\ S(0)=1,\ S'(0)=0\end{cases}$

2. 求 $1+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{6!}+\cdots+\dfrac{1}{(3n)!}+\cdots$

$S(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$

$\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}e.$

$S(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$

$S(1)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{3}e$