《数学分析 》课程教学及考试大纲

课程类型：必修课 课程代码：_______ 课程学时：356学分： 20

适用专业： 数学与应用数学等（师范/非师范）本科专业

开课时间： 一、二 年级_共四_学期 开课单位： 应用数学系

大纲执笔人：__________________大纲审定人：______________________

一、说 明

1.本课程是数学和应用数学本科专业的一门重要基础课，它的任务是使学生获得极限论、一元函数微积分、无穷级数与多元函数微积分等方面的系统知识。

本课程是进一步学习复变函数论、微分方程、概率论、实变函数论与泛函分析等后继课程的阶梯，也为深入理解中学数学打好必要的基础。

2.通过本课程的讲授与作业应使学生：

（1）对极限思想方法有较深入的认识，从而有助于培养学生的辩证唯物主义观点。

（2）正确理解数学分析的基本概念，基本上掌握数学分析中的论证方法，获得较熟的演算技能和初步运用的能力。

3.本课程教学时数为356学时，其中讲授课280学时，习题课 74学时，讨论课2学时.本课程一般在数学和应用数学（师范/非师范）本科专业的第一、二年级共四个学期开设每学期都采用闭卷笔试的方式进行考试。

4.本大纲细则部分按23单元编写，每单元给出教学内容、教学时数与课型、教学建议（行文时称为“附注 ”）与教学参考书，实施时请注意以下几点：

（1）。本大纲列入部分带（*）号内容供选用，而没有带（*）号的内容（除“附注 ”中特别说明之外）都是教学的必要内容和重要内容。

（2 ）本大纲把“实数理论”作为“第二十三单元”放在最后,对师范性专业建议 结合实数基本定理的证明作适当介绍。

（3）在不影响基本要求的情况下，本大纲所给出的各单元的授课时数作适当调整。

二、细 则

第一单元 实 数 集 与 函 数

教学时数与课型：18学时，其中：讲授课14学时，习题课4学时。

教学内容：

1．实数的性质（封闭性、有序性、阿基里得性、稠密性与连续性）概述，绝对不等式。

2。区间与邻域。有界集、确界与确界原理。

3．函数概念，函数的几种表示方法。

4．函数的四则运算法则，复合函数，反函数。

5．基本初等函数，初等函数。

6．几类特殊类型的函数（有界函数、单调函数、奇函数、偶函数和周期函数）。

附注 ：

1．为了与中学数学相衔接，建议用十进小数来定义实数，并指明其性质。

2．为了与现代数学相衔接，建议用映射的观点来定义函数，并注意函数符号和函数符号的正确法。

3．在讲函数的几种表示方法时，着重突出解析法和图象法。

4．分段函数和一些常出现的非初等函数较难掌握。在讲授时，要从几何直观入手，引导学生画出或想象其图象。

5．数集的上确界和下确界，有界函数和无界函数等定义是本单元教学难点，适当补充一些例子和习题，加强训练。

第二单元：数 列 极 限

教学时数与课型：20 学时，其中：讲授课 14 学时，习题课 4 学时，讨论课 5 学时。

教学内容：

1．数列。数列极限的$\varepsilon-N$定义。无穷小数列。

2．收敛数列的性质：唯一性，有界性，保号性，不等式性，迫敛性，四则运算法则，子列的性质。

3．数列的收敛判别法（单调有界性定理，柯西(Cauchy)准则）及极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

附注 ：

1. 数列极限的$\varepsilon-N$定义是教学难点。建议在讲授时，注意揭示数列极限的性态,指出从定性到定量用定量来定性的辩证思想，讲清数列$\{a_n\}$以 a 为极限和不以 a 为极限说法几何意义。建议安排讨论课，使学生对“数列极限的$\varepsilon-N$定义”有深刻的认识。
2. 注意培养学生利用定义和收敛数列的性质定理来论证具体问题的能力，这是数学分析教学的难点与关键之一。
3. 单调有界性定理和柯西准则是实数基本定理，这里可只对单调有界性定理给出证明，并要求学生能利用单调有界性定理进行理论论证；对柯西准则只要求能利用其证明具体数列的敛散性，至于它在理论证明的应用，等介绍新定理的证法后，进一步深化。

第三单元：函 数 极 限

教学时数与课型：20 学时，其中：讲授课 16 学时，习题课 7 学时。

教学内容：

1．函数极限的$\varepsilon-M$定义和$\varepsilon-\delta$定义 。单侧极限。

2．函数极限的性质：唯一性，有界性，局部保号性，不等式性，迫敛性，四则运算法则。

3． 函数极限的归结原则和柯西准则。

4．两个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ ，与$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 。

5 无穷小量及其阶的比较。非正常极限 ，无穷大量

附注：

1．函数极限的$\varepsilon-\delta$定义是教学难点与关键，在讲授时，要从几何直观入手，揭示函数极限的性态。

2．要求学生掌握函数极限的性质定理的证明方法，能应用函数极限和性质定理进行

理论论证。

3．揭示单侧极限与极限的关系。注意要求学生掌握分段函数极限的求法，它是求函数极限的难点，又是今后研究分段函数的连续性和导数的基础。

4． 求学生能应用归结原则和柯西准则证明具体函数极限的不存在性,能应用归结原则求数列极限.

5．要求学生掌握无穷小量，非正常极限和无穷大量概念 .弄清“o ” ，“O”的涵义。揭示无穷小量与无穷大量的关系，函数极限与无穷小量的关系。

6．曲线的渐近线是函数作图的知识，这里先介绍。

第四单元：函 数 的 连 续 性

教学时数与课型：20 学时，其中：讲授课 16 学时，习题课 4 学时。

教学内容：

1．函数在一点连续、单侧连续和在区间上连续函数的定义，间断点及其分类。

2．连续函数的局部性质：局部有界性，局部保号性。连续函数的四则运算，复合函数的连续性。反函数的连续性。

3． 闭区间上连续函数的性质 ：有界性，最大值与最小值存在性，介值性，一致连续性。

4．初等函数的连续性。

附注

1．函数的连续定义是分析学的基本概念，在讲授函数在一点连续函数定义时 要从几何直观入手，揭示概念的内涵和外延，分段函数在分段点的连续性是教学难点，要使学生掌握函数在一点连续与单侧连续的关系。

2． 区间上连续函数的性质定理的证明可等学习实数基本定理后才给出，但这里要求学生能利用闭区间上连续函数的性质，解决具体的理论证明和应用问题。

3 。函数的一致连续性是本单元的教学难点之一，要适当补充一些例子和习题，加强训练。

第五单元：导 数 和 微 分

教学时数与课型：16 学时，其中：讲授课 14 学时，习题课 2 学时。

教学内容

1． 导数定义，单侧导数 ，导函数。导数的几何意义。

2． 和，差，积，商的导数。反函数的导数。复合函数的导数。初等函数的导数。参变量函数的导数。

3． 高阶导数。莱布尼兹(Leibniz)公式。

4． 微分概念。微分的几何意义。微分运算法则。一阶微分则形式不变性。

5． 高阶微.分 . 微分在近似计算与误差估计中的应用,。

附注:

1． 导数定义是微分学的基本概念，建议在讲授时，由切线问题与瞬时速度问题为背景来引入。并讲清可导与连续的关系.

2． 要求学生掌握导数与单侧导数的关系,能求分段函数的导数。这是求导数的难点,

3． 应用导数运算法则和基本初等函数的求导公式,求初等函数的导数是教学和学生作业的重点,复合函数求导数则是教学和学生作业的难点,要求学生要加强练习,达到熟练.

4． 高阶导数 是求函数的泰勒展开式和幂级数展开式的工具，要加强训练。

5．要求学生掌握微.分与导数的关系，可导与连续的关系，

第 六单元： 微 分 中 值 定 理 及 其 应 用，

教学时数与课型：22 学时，其中：讲授课 18 学时，习题课 4 学时。

教学内容

1. 罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理、柯西中值定理
2. 求不定式 极限的洛必达（L'Hospital）法则。
3. 泰勒 公式，泰勒公式余项的（拉格朗日型和皮亚诺的（Peano）型）余项。一些初等函数的泰勒展开式。函数值的近似计算。
4. 函数单调性判定法。
5. 函数极值的概念，极值的必要条件。极值的充分条件，最大值最小值。
6. 曲线凹凸性及其拐点。函数图象的讨论。
7. 方程的近似解法。

附注:

1．微分中值定理（包括罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒定理）是利用函数导数的已知来推断函数与其所应的性质的有力工具，是本单元教学的重点。建议在讲授这些定理时，要揭示它们之间的相互关系，以及各定理的几何意义与证法。

2. 求学生能在讲授罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理解决理论证明题 ，进一步培养学生理论证明的能力 。
3. 在讲授微分中值定理应用方面的内容时，要联系中学数学教学实际，突出高等数学对初等数学的指导作用。

第七单元：实 数 完 备 性 的 基 本 定 理

教学时数与课型：14 学时，其中：讲授课 10 学时，习题课 4 学时。

教学内容：

1. 确界原理. 数列的单调有界性定理.数列的柯西(Cauchy)收敛准则..区间套定理。敛准则。聚点定理。有限覆盖定理。致密性定理
2. 闭区间上连续函数的性质的证明。

3*。数列的上极限和下极限 。

附注

1．实数完备性的基本定理是极限理论乃至整个数学分析的基础。确界原理. 数列的单调有界性定理和数列的柯西收敛准则此之前已出现，而区间套定理,聚点定理，有限覆盖定理和致密性定理刚出现。在讲授时必须指出这些定理的等价性并指出有理数集不具备这种特性。

2 在讲授利用实数完备性的基本定理证明闭区间上连续函数的性质的同时，要进一步加强对学生“用闭区间上连续函数的性质定理进行理论证明”的能力训练。可以补充些习题。

第八单元：不 定 积 分

教学时数与课型：14 学时。其中：讲授课 10 学时，习题课 4 学时。

教学内容：

1. 原函数与不定积分。基本积分表。
2. 线性运算法则。换元积分法。分部积分法。
3. 有理函数积分法。三角有理函数的积分。
4. 几种无理函数的积分：

$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 与 $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ $(a.>0,b^2-4ac\neq 0;a<0,b^2-4ac>0)$ 等。

附注

1：原函数存在性定理这里只讲不证，证明留待下一单元“定积分”中进行。

2．不定积分运算是积分学基本运算。本单元的教学重点是向学生介绍不定积分的运算方法，要求学生加强练习，达到熟练

第九单元： 定 积 分

教学时数与课型：24 学时。其中：讲授课 18 学时，习题课 6 学时。

教学内容：

1. 定积分定义。定积分的几何意义。牛顿(Newton)—莱布尼兹公式。
2. 可积的必要条件上和、下和及其性质。可积的充要条件。
3. 可积函数类。在闭区间上连续的函数、在闭区间上只有有限个不连续点的有界函数、单调函数
4. 定积分的性质：线性运算法则、区间可加可积性、不等式性质、绝对可积性。积分中值定理
5. 微积分基本定理。换元积分法。分部积分法。

附注：

1. 讲定积分定义时，建议以积分积曲边梯形与变力做功为背景来引入。
2. 可积条件的讨论和定积分的性质在理论证明方面的应用，是本单元的教学难点。
3. 微积分基本定理-原函数存在性定理，这里除了给出证明之外，还要突出它的作用，建议做适当练习。
4. 定积分的计算是重积分和曲线、曲面积分计算的基础，不能忽视。

第十单元： 定 积 分 的 应 用

教学时数与课型：10 学时。其中：讲授课 8 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1. 平面图形的面积。
2. 已知截面面积函数的立体体积。旋转体的体积。旋转体的侧面积
3. 平面曲线的弧长与弧微分。曲率。
4. 微元法。旋转体的侧面积。
5. 定积分在物理中的应用：液体静压力、引力、功与平均功率。
6. 定积分的近似计算：梯形法、抛物线法。

附注：

1. 本单元的教学侧重于讲授定积分在几何中的应用方面的内容，而定积分在物理的应用方面只举例说明。

第十一单元： 反 常 积 分

教学时数与课型：10 学时。其中：讲授课 8 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1. 无穷限积分的概念。柯西收敛准则。线性运算法则。绝对收敛与条件收敛。收敛性判别法。
2. 瑕积分的概念。收敛性判别法。

附注：

1. 讲两类反常积分概念时，建议以物理与数学实际为背景来引入。

2. 两类反常积分的概念与敛散性判定是本单元教学重点，而狄利克雷（Dirichlet）判别法和阿贝尔（Abel）判别法是教学难点.

第十二单元： 数 项 级 数

教学时数与课型：16 学时。其中：讲授课 12 学时，习题课 4 学时。

教学内容：

1. 级数收敛与和的概念。柯西收敛准则。收敛级数的基本性质。
2. 正项级数。收敛原理。比较判别法. 比式判别法与根式判别法拉。拉贝（Raobe） 判别法与高斯（Gouss）判别法*.
3. 一般项级数。绝对件收敛定义与条件收敛。交错级数。莱布尼兹判别法。阿贝尔判别法狄利克雷判别法。
4. 绝对收敛级数的重排定理。条件收敛级数的黎曼（Riemann）定理.

附注：

1. 级数收敛定义与敛散性判定是本单元教学重点，而狄利克雷（Dirichlet）法和阿贝尔（Abel）判别法是教学难点.
2. 要求学生正确理解和应用级数收敛的必要条件。

第十三单元：函 数 列 与 函 数 项 级 数

教学时数与课型：14 学时。其中：讲授课 12 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1. 函数列与函数项级数的收敛与一致收敛概念。一致收敛柯西准则。

2. 函数项级数一致收敛维尔斯特拉斯（Weievstvass）优级数判别法。阿贝尔判别法与狄利克雷判别法.

3. 函数列极限函数与函数项级数和函数的连续性、逐项积分与逐项求导性质。

附注：

1. 讨论函数列极限函数与函数项级数和函数的连续性、逐项积分与逐项微分等性质本单元的主要目的，而函数列与函数项级数的一致收敛条件是数学分析中讨论这类问题所用的主要条件。
2. 函数列与函数项级数的一致收敛性判定本单元的教学难点也是整个数学分析教学的难点，而阿贝尔判别法狄利克雷判别法的应用又是难中之难。函数项级数一致收敛维尔斯特拉斯优级数判别法是常用的简易方法。建议教师耐心引导学生，适当增加练习。

第十四单元：幂 级 数

教学时数与课型：14 学时。其中：讲授课 12 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1. 阿贝尔定理。收敛半径与收敛区间。一致收敛性。连续性、逐项积分与逐项微分. 幂级数的加法与乘法。
2. 泰勒级数。泰勒展开的条件。初等函数的泰勒展开。近似计算。
3. 用幂级数定义正弦、余弦函数*。复变量函数的指数函数与欧拉（Euler）公式。

附注：

1. 近似计算中应包括 e 是无理数的证明。

2. 本单元的主要练习要求初等函数的泰勒展开式与幂级数在收敛区域的和函数建议教师引导学生练习时，要求学生紧密结合理论来做题。

第十五单元：傅 里 叶 （Fourier）级 数

教学时数与课型：10 学时。其中：讲授课 8 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1. 三角级数。三角函数系的正交性。傅里叶级数。傅里叶级数的收敛定理。
2. 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数。奇函数与偶函数的傅里叶级数。
3. 以 21 为周期的函数的傅里叶展开式.
4. 贝塞尔（Bessel）不等式。黎曼-勒贝格（Rieman__Lebesgue）定理。傅里叶级数的收敛定理的证明。

附注：

1. 本单元的教学重点.是求周期的函数的傅里叶展开式。傅里叶级数的收敛定理只介绍不给出证明，要求学生能理解与应用，它的证明与贝塞尔不等式、黎曼-勒贝定理等可作为供学生自学或参考的内容。

第十六单元：多 元 函 数 的 极 限 与 连 续

教学时数与课型：14 学时。其中：讲授课 12 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1. 平面点集的基本概念：邻域、内点、界点、聚点、开集、闭集、开域、闭域。
2. 二元函数的概念及其几何表示。n 维空间与 n 元函数。
3. R^2 的完备性定理：柯西准则、区域套定理、聚点定理、有限覆盖定理。
4. 重极限与累次极限 。二元函数的连续性。有界闭域上的连续函数的性质。

附注：

1. 建议用映射的观点来讲二元函数与 n 元函数的概念。
2. 二元函数的重极限是本单元教学难点。
3. 在讲 R^2 的完备性定理时，建议与实数完备性定理做比较，并指明 R^n 的完备性定理。

第十七单元：多 元 函 数 微 分 学

教学时数与课型：22 学时。其中：讲授课 18 学时，习题课 4 学时。

教学内容：

1. 偏导数及其几何意义。
2. 全微分的概念。全微分的几何意义。可微的充分条件。全微分在近似计算中的应用。
3. 方向导数与梯度。
4. 复合函数的偏导数与全微分。一阶全微分形式不变性。
5. 高阶导数及其与顺序无关的条件。高阶微分。
6. 二元函数的泰勒定理。二元函数的极值。

附注:

1. 在教学中，必须注意多元函数微分学与一函数微分学的相似与不同之处，揭示多元函数连续、存在偏导数与可微三个概念之间关系.求复合函数的偏导数是教学的难点.
2. 在极值举例中可介绍“最小二乘法”。

第十八单元：隐 函 数 定 理 及 其 应 用

教学时数与课型：14 学时。其中：讲授课 10 学时，习题课 4 学时。
教学内容：

1. 隐函数概念。隐函数定理。隐函数求导。
2. 隐函数组概念。隐函数组定理。隐函数组求导。
3. 反函数组与坐标变换。函数行列式。函数相关*。
4. 几何应用。条件极值与拉格朗日乘数法。

注附：

1. 隐函数定理可只讲证明思想，详细证明过程留给学生自学。
2. 建议用映射的观点来讲隐函数组，反函数组与坐标变换的概念。

第十九单元：含 参 量 积 分

教学时数与课型：14 学时。其中：讲授课 12 学时，习题课 2 学时。
教学内容：

1. 含参量积分的概念。连续性、可微性与可积性。积分顺序的交换。
2. 参量反常积分的收敛与一致收敛性。一致收敛的柯西准则。维尔斯特拉斯判别法、阿贝尔判别法与狄利克雷判别法。连续性、可微性与可积性。积分顺序的交换*。
3. Γ 函数与 B 函数。

附注：

1. 参量反常积分一致收敛的阿贝尔判别法与狄利克雷判别法的证明留给学生自学。教师可讲明条件与结论，并引导学生应用它们判定具体问题。
2. Γ 函数与 B 函数可作一般的介绍。

第二十单元：曲 线 积 分

教学时数与课型：12 学时。其中：讲授课 10 学时，习题课 2 学时。
教学内容：

1. 第一型曲线积分的概念与计算。
2. 第二型曲线积分的概念与计算。
3. 两类曲线积分的联系。

附注：

1. 建议从不同的物理背景分别引出两类曲线积分的概念。
2. 在教学中，必须注意揭示两类曲线积分性质的相似与不同之处。

第二十一单元：重 积 分

教学时数与课型：20 学时。其中：讲授课 16 学时，习题课 4 学时。
教学内容：

1．平面图形的面积。二重积分的定义及其存在性。二的重积分的性质。直角坐标下计算二重积分。格林公式•曲线积分与路线的无关性。二重积分的换元法（极坐标变换与一般变换）

2．三重积分的概念。化三重积分为累次积分。三重积分的换元法（柱面坐标变换、球坐标变换与一般变换）。

3. 重积分的应用：立体的体积。曲面的面积。物体的重心。质点（物体）关于轴（面）的转动惯量、引力。
4. n 重积分

5. 无界区域上反常二重积分的收敛性概念。无界函数反常重积分。

附注：

1：本单元的教学重点是二重积分与三重积分的概念、性质和计算。

2． 建议用微元法讲重积分的应用。

3．在讲无界区域上反常二重积分时，介绍的 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 计算。

第二十二单元：曲 面 积 分

教学时数与课型：12 学时。其中：讲授课 10 学时，习题课 2 学时。

教学内容：

1．第一型曲面积分的概念。第一型曲面积分的计算。

2 。曲面的侧。第二型曲面积分的概念。第二型曲面积分的计算。

3．两类曲面积分的联系。

4．高斯公式与斯托克斯公式。

5*场论初步（场的概念、梯度场、散度场、旋度场、量场与有势场）。

附注：

1． 建议从不同的物理背景分别引出两类曲线积分的概念。

2． 在教学中，必须注意揭示两类曲线积分性质的相似与不同之处。

第二十三单元*：实 数 理 论

附注：

1． 为了与分析的其它分支联系得更加紧密，我们建议主要介绍康托尔（Cantor）的基本序列说，对戴德金(Dedekind)的分割说仅介绍其大意。

教学参考书 ：

1．华东师范大学数学系编　数学分析 （上、下册） 高等教育出版社 2001 年第三版。

2．复旦大学数学系主编　数学分析 （上、下册） 上海科技出版社 2001 年第三版。

3．Г。М 菲尔金哥尔茨著 北京大学高等数学教研室译 微积分教程 1954 年 5 月第三版。