

实变函数

1 预备知识

1.1 记号与基本点集理论

- 1.1.1.1 点集与函数
- 1.1.1.2 集合的有关记号：并、交、差、余
- 1.1.1.3 de Morgan 律
- 1.1.1.4 集合的乘积
- 1.1.1.5 函数定义
- 1.1.1.6 函数的复合与四则运算
- 1.1.1.7 特征函数
- 1.1.1.8 等价关系

1.1.2 直线上可数集与不可数集

- 1.2.1.1 有限集
- 1.2.1.2 Δ 可数集
- 1.2.1.3 Δ 不可数集
- 1.2.1.4 有理数集合的可数性

1.1.3 \mathbb{R} 中的拓扑性质

- 1.1.3.1 开集
- 1.1.3.2 Δ 开集构成定理
- 1.1.3.3 闭集
- 1.1.3.4 连续函数

1.2 Rirmann 积分的局限性

1.2.1 Riemann 可积性简介

2 测度

2.1 零测集

- 2.1.1 定义
- 2.1.2 零测集的可数并为零测集
- 2.1.3 Cantor 集

2.2 外测度

- 2.2.1 定义
- 2.2.2 零测集的外测度为 0
- 2.2.3 空集的外测度
- 2.2.4 若 $A \subset B$, 则 $m^*(A) \leq m^*(B)$
- 2.2.5 区间的外测度
- 2.2.6 次可数可加性
- 2.2.7 平移不变性

2.3 Lebesgue 可测集与 Lebesgue 测度

- 2.3.1 测试与可测集定义
- 2.3.2 零测集与区间可测
- 2.3.3 可测集的性质
- 2.3.4 σ 域
- 2.4 Lebesgue 测度的性质
 - 2.4.1 单调性
 - 2.4.2 开集的测试
 - 2.4.3 渐张(缩)集列极限集的测度
 - 2.4.4 有限可加性
- 2.5 Borel 集
 - 2.5.1 σ 域的性质
 - 2.5.2 Borel 集的定义
 - 2.5.3 Borel 集类与 Lebesgue 可测集类的关系
- 3 可测函数
 - 3.1 扩充实直线
 - 3.1.1 $\bar{R} = [-\infty, \infty]$
 - 3.2 定义
 - 3.2.1 几乎处处
 - 3.2.2 函数几乎处处相等的概念
 - 3.2.3 可测函数定义
 - 3.4 性质
 - 3.4.1 可测函数的四则运算及复合
 - 3.4.2 f^+ 、 f^- 、 $|f|$ 及上下限函数的可测性
 - 3.4.3 鲁津定理
- 4 积分
 - 4.1 积分定义
 - 4.1.1 简单函数的积分
 - 4.1.2 非负可测函数的积分
 - 4.1.3 非负函数积分的性质, 单调性, 可加性, 线性
 - 4.1.4 积分为 0 的条件
 - 4.2 单调收敛定义
 - 4.2.1 Fatou 引理
 - 4.2.2 Levi 引理
 - 4.3 可积函数
 - 4.3.1 定义
 - 4.3.2 积分的性质
 - 4.3.3 L 构成——线性空间
 - 4.3.4 绝对不等式

- 4.3.5 由积分 定义测试
- 4.4 控制收敛这理
 - 4.4.1 控收敛定理
 - 4.4.2 Beppo-Levi 定理
- 4.5 与 Riemann 积分的关系
 - 4.5.1 Riemann 可积的充要条件
 - 4.5.2 广义 Riemann 积分
- 4.6 可测函数的逼近
 - 4.6.1 简单函数的逼近
 - 4.6.2 连续函数逼近(Thearem4.15)
 - 4.6.3 Riemann-Lebsegue 引理
- 5 可积函数空间
 - 5.1 空间 L^1
 - 5.1.1 度量及范数的定义
 - 5.1.2 $L^1(E)$ 为 Banach 空间
 - 5.2 Hilbert 空间 L^2
 - 5.2.1 L^2 -范数的性质
 - 5.2.1.1 Schwarz 子不等式
 - 5.2.1.2 $L^2(D) \subset L^1(D)$ ($m(D) < \infty$)
 - 5.2.2 内积空间
 - 5.2.2.1 内积空间定义
 - 5.2.2.2 L^2 为 Hilbert 空间
 - 5.2.3 正义性
 - 5.2.3.1 Hilbert 空间的正交基
 - 5.2.3.2 向量夹角
 - 5.3 L^p 空间
 - 5.3.1 L^p -范数
 - 5.3.2 Holder 不等式
 - 5.3.3 Minkowski 不等式
 - 5.3.4 L^∞ 空间
 - 5.3.5 完备性
- 6 乘积测度
 - 6.1 多维 Lebesgue 测度
 - 6.1.1 定义
 - 6.2 σ -域的乘积
 - 6.3 乘积测试的构造
 - 6.4 Fubini 定理

参考书目：

1. 江泽坚 吴智泉 《实变函数论》，高等教育出版社。
2. 郑维行 王声望 《实变函数与泛函分析概要》（上），高等教育出版社。

