【第三章习题】

1. 设总体X的一个样本容量为n，试求U(0, θ)分布中未知参数θ的矩估计量和极大似然估计量。

解：$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, 0<x<\theta\\ 0, 其他,\end{cases}$ $E(X)=\int_0^{\theta}x\dfrac{1}{\theta}dx=\dfrac{\theta}{2}$， $\theta=2E(X)$， $\hat{\theta}=2\overline{X}$；

$L(\theta)=\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n$， $0<x_1, x_2, \cdots, x_n<\theta$， $\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\limits_i X_i$。

2. 设总体X的一个样本容量为n，X的分布密度$p(x)=(1+\alpha)x^{\alpha}$，式中的$x\in(0,1)$，试求未知参数α的矩估计量和极大似然估计量。

解：$E(X)=\int_0^1 x(1+\alpha)x^{\alpha}dx=\dfrac{1+\alpha}{\alpha+2}$， $\alpha=\dfrac{1-2E(X)}{E(X)-1}$， $\hat{\alpha}=\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

$L(\alpha)=(1+\alpha)^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\alpha}$， $\ln L=n\ln(1+\alpha)+\alpha\ln(x_1x_2\cdots x_n)$，

$\dfrac{d\ln L}{d\alpha}=\dfrac{n}{1+\alpha}+\ln(x_1x_2\cdots x_n)=0$， $\hat{\alpha}_L=-\dfrac{n}{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}-1$。

3. 设总体X的一个样本容量为n，试当X为离散型随机变量且

$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$， $k=1,2,\cdots$

时求未知参数p的极大似然估计量。

解：将$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$， $k=1,2,\cdots$改写为

$P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1}$， $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$， $L(p)=p^n(1-p)^{\sum\limits_i x_i-n}$，

$\ln L=n\ln p+\left(\sum\limits_i x_i-n\right)\ln(1-p)$， $\dfrac{d\ln L}{dp}=\dfrac{n}{p}-\dfrac{\sum\limits_i x_i-n}{1-p}=0$， $\hat{p}_L=\dfrac{n}{\sum\limits_i x_i}$。

4. 设总体X的一个样本容量为n，试求E(k)分布中未知参数k的极大似然估计量。

解：$p(x)=\begin{cases}ke^{-kx}, 0<x\\ 0, 其他,\end{cases}$ $L(k)=k^n e^{-k\sum\limits_i x_i}$， $\ln L=n\ln k-k\sum\limits_i x_i$，

$\dfrac{d\ln L}{dp}=\dfrac{n}{k}-\sum\limits_i x_i=0$， $\hat{k}_L=\dfrac{n}{\sum\limits_i x_i}$。

5. 设总体X的一个样本容量为n，试求P(λ)分布中未知参数λ的极大似然估计量。

解： $P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$， $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$， $L(\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_i x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$，

$\ln L=\left(\sum_i x_i\right)\ln\lambda-\ln(x_1!\,x_2!\cdots x_n!)-n\lambda$，

$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{\sum_i x_i}{\lambda}-n=0$， $\hat{\lambda}_L=\frac{\sum_i x_i}{n}=\overline{X}$。

6. 设总体X的一个样本容量为n,，试求对数正态分布中未知参数μ和σ^2的极大似然估计量。

解： $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}e^{-\frac{\sum_i(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

$\ln L=-\frac{n}{2}\left[\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\right]-\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\frac{\sum_i(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$，

$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{2\sum_i(\ln x_i-\mu)}{2\sigma^2}=0$， $\hat{\mu}_L=\frac{1}{n}\sum_i\ln x_i$；

$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_i(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0$，

当μ已知时， $\hat{\sigma}^2_L=\frac{1}{n}\sum_i(\ln x_i-\mu)^2$；

当μ未知时， $\hat{\sigma}^2_L=\frac{1}{n}\sum_i(\ln x_i-\hat{\mu}_L)^2$。

【P45复习题】

1. 求事件概率p的矩估计量和极大似然估计量，讨论估计量的无偏性。

解： E(X)=p，$\hat{p}=\overline{X}$；P{X=x}=$p^{x}(1-p)^{1-x}$，$x=x_1,x_2,\cdots,x_n$，

L(p)= $p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}$，$\ln L=\left(\sum_i x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_i x_i\right)\ln(1-p)$，

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{\sum_i x_i}{p}-\frac{n-\sum_i x_i}{1-p}=0,\quad \hat{p}_L=\frac{\sum_i x_i}{n}=\overline{X};$$

E($\overline{X}$)=p，都是无偏估计量。

2. 设总体X服从U(0, θ)分布，试论述未知参数θ的矩估计量是无偏估计量，θ的极大似然估计量是渐近无偏估计量。

解： $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,\text{其他},\end{cases}$ $E(X)=\int_0^\theta x\frac{1}{\theta}dx=\frac{\theta}{2}$，θ=2E(X)，$\hat{\theta}=2\overline{X}$；

$L(\theta)=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n$，$0<x_1,x_2,\cdots,x_n<\theta$，$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max_i X_i$；

E($\hat{\theta}$)=θ，是无偏估计量；

$F(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ \frac{x}{\theta},0<x\le\theta\\ 1,\theta<x,\end{cases}$ $F^*_{\max}(z)=[F(z)]^n$，

$p^*_{\max}(z)=\begin{cases}n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,\text{其他},\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_L)=E(X_{(n)})=E(\max_i X_i)=\int_0^\theta xn\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dx=\frac{n\theta}{n+1}$，不是无偏估计量；

$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_L)=\theta$，是渐近无偏估计量。

3. 设总体X服从N(0, σ^2)分布，X_1，X_2，…，Xn为总体的一个样本，

试确定c，使T=c$\sum_{i=1}^n X_i^2$ 是σ^2的无偏估计量。

解：因为E(X_i)=0，E(X_i^2)=σ^2，所以E{$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$}=nσ^2，c=$\frac{1}{n}$。

4. 若$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是θ的两个互不相关的无偏估计量，D($\hat{\theta}_1$)=2D($\hat{\theta}_2$)，试确定常数c_1与c_2，使$c_1\hat{\theta}_1+c_2\hat{\theta}_2$仍是θ的无偏估计量并在这一类无偏估计量中是有效估计量。

解：因为E($c_1\hat{\theta}_1+c_2\hat{\theta}_2$)= c_1E($\hat{\theta}_1$)+c_2E($\hat{\theta}_2$)=c_1θ+c_2θ=θ，所以$c_1+c_2=1$； 又因为 D($c_1\hat{\theta}_1+c_2\hat{\theta}_2$)= c_1^2D($\hat{\theta}_1$)+c_2^2D($\hat{\theta}_2$)
=$2c_1^2$D($\hat{\theta}_2$)+c_2^2D($\hat{\theta}_2$)=($2c_1^2+c_2^2$)D($\hat{\theta}_2$)，所以当$2c_1^2+c_2^2$在条件$c_1+c_2=1$下取极小值时$c_1\hat{\theta}_1+c_2\hat{\theta}_2$在这一类无偏估计量中是有效估计量。

令f=$2c_1^2+c_2^2=2c_1^2+(1-c_1)^2$，由f'=4$c_1$—2(1—$c_1$)=0解出$c_1=\frac{1}{3}$，$c_2=\frac{2}{3}$。

5. 设总体X服从N(μ，σ^2)分布，X_1，X_2，…，Xn为总体的一个样本，试确定统计量S^2，$S*^2$，使T=$\frac{n}{n+1}S^2$中哪一个是未知参数σ^2的无偏估计量？哪一个对σ^2的均方误差最小？

（提示：若某个随机变量服从χ^2(n)分布，则其数学期望为n，方差为2n）

解：$E\left(\frac{\sum_i (X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right)$=n—1，$E\left(\sum_i (X_i-\overline{X})^2\right)$=(n—1) σ^2，

E(S^2)=$\frac{n-1}{n}\sigma^2$，E($S*^2$)=σ^2，E(T)=$\frac{n-1}{n+1}\sigma^2$，$S*^2$是σ^2的无偏估计量。

又$D\left(\frac{\sum_i (X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\right)$=2(n—1)，$D\left(\sum_i (X_i-\overline{X})^2\right)$=2(n—1)$\sigma^4$，

D(S^2)=$\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$，D($S*^2$)=$\frac{2}{n-1}\sigma^4$，D(T)=$\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4$；

根据公式$E(\hat{\theta}-\theta)^2$=D($\hat{\theta}$)+$(E\hat{\theta}-\theta)^2$，它们对σ^2的均方误差

$$E(S^2-\sigma^2)^2=D(S^2)+(ES^2-\sigma^2)^2=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4+(\frac{n-1}{n}\sigma^2-\sigma^2)^2=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4;$$

$$E(S^{*2}-\sigma^2)^2=D(S^{*2})+(ES^{*2}-\sigma^2)^2=\frac{2}{n-1}\sigma^4+(\sigma^2-\sigma^2)^2=\frac{2}{n-1}\sigma^4;$$

$$E(T-\sigma^2)^2=D(T)+(ET-\sigma^2)^2=\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4+(\frac{n-1}{n+1}\sigma^2-\sigma^2)^2=\frac{2}{n+1}\sigma^4;$$

$E(T-\sigma^2)^2=\frac{2}{n+1}\sigma^4$最小。

6. 设总体X服从N(μ，σ^2)分布，相互独立地从X抽出容量分别为n_1与n_2的两个样本，$\overline{X}_1$和$\overline{X}_2$是两个样本的均值，试证明对于常数a和b只要$a+b=1$，则$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$就都是μ的无偏估计量，再确定$a$和$b$的值使D(Y)达到极小。

解： $E(\overline{X}_1)=\mu$，$E(\overline{X}_2)=\mu$，$D(\overline{X}_1)=\frac{\sigma^2}{n_1}$，$D(\overline{X}_2)=\frac{\sigma^2}{n_2}$，

$E(Y)=E(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=aE(\overline{X}_1)+bE(\overline{X}_2)=(a+b)\mu$，所以

只要$a+b=1$，$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$就都是μ的无偏估计量;

又$D(Y)=D(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=a^2D(\overline{X}_1)+b^2D(\overline{X}_2)=a^2\frac{\sigma^2}{n_1}+b^2\frac{\sigma^2}{n_2}$

$=\sigma^2\left(\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}\right)$，令$f=\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}=\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}$，由

$f'=\frac{2a}{n_1}-\frac{2(1-a)}{n_2}=0$ 解出$a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$，$b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$。

7. 设总体X_1服从N(μ_1，σ^2)分布，总体X_2服从N(μ_2，σ^2)分布，相互独立地从X_1和X_2中抽出容量分别为m与n的两个样本，S^{*2}_1和S^{*2}_2是两个样本的修正方差，试证明对于常数a和b只要$a+b=1$，则$Z=a\,S^{*2}_1+$

b $S*_2^2$ 就都是σ^2 的无偏估计量，再确定 a 和 b 的值使 D(Z)达到极小。

解： $E(S*_1^2)=\sigma^2$，$E(S*_2^2)=\sigma^2$，$D(S*_1^2)=\dfrac{2\sigma^4}{m-1}$，$D(S*_2^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$，

$E(Z)=E(a\,S*_1^2+b\,S*_2^2)=aE(S*_1^2)+bE(S*_2^2)=(a+b)\ \sigma^2$，所以

只要 $a+b=1$，$Z=a\,S*_1^2+b\,S*_2^2$ 就都是σ^2 的无偏估计量；

又 $D(Z)=D(a\,S*_1^2+b\,S*_2^2)=a^2D(S*_1^2)+b^2D(S*_2^2)=a^2\dfrac{2\sigma^4}{m-1}+b^2\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

$=2\sigma^4\left(\dfrac{a^2}{m-1}+\dfrac{b^2}{n-1}\right)$，令 $f=\dfrac{a^2}{m-1}+\dfrac{b^2}{n-1}=\dfrac{a^2}{m-1}+\dfrac{(1-a)^2}{n-1}$，由

$f'=\dfrac{2a}{m-1}-\dfrac{2(1-a)}{n-1}=0$ 解出 $a=\dfrac{m-1}{m+n-2}$，$b=\dfrac{n-1}{m+n-2}$。

8. 设总体 X 服从 U(0, θ)分布，X_1，X_2，X_3是总体的一个样本，试证明未知参数 θ 的估计量$\hat{\theta}_1=\dfrac{4}{3}\max\limits_i X_i$ 和$\hat{\theta}_2=4\min\limits_i X_i$ 都是 θ 的无偏估计量论述哪一个估计量的方差最小。

解： $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,其他,\end{cases}$　$F(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ \dfrac{x}{\theta},0<x\le\theta\\ 1,\theta<x,\end{cases}$

$F^*_{\max}(z)=[F(z)]^3$，　$p^*_{\max}(z)=\begin{cases}3\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^2\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,其他,\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_1)=E(\dfrac{4}{3}X_{(3)})=E(\dfrac{4}{3}\max\limits_i X_i)=\dfrac{4}{3}\int_0^\theta 3x\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^2\dfrac{1}{\theta}dx=\theta$，是无偏估计量,

$E(X_{(3)})=E(\max\limits_i X_i)=\dfrac{3}{4}\theta$，$E(X_{(3)})^2=E(\max\limits_i X_i)^2=\int_0^\theta 3x^2\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^2\dfrac{1}{\theta}dx=\dfrac{3}{5}\theta^2$，

$D(X_{(3)})=D(\max\limits_i X_i)=\dfrac{3}{80}\theta^2$，$D(\hat{\theta}_1)=\dfrac{1}{15}\theta^2$；

$F^*_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^3$， $p^*_{\min}(z)=\begin{cases}3\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^2\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta\\0,其他,\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2)=E(4X_{(1)})=E(4\min\limits_i X_i)=4\int_0^\theta 3x\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^2\dfrac{1}{\theta}dx=\theta$，是无偏估计量，

$E(X_{(1)})=E(\min\limits_i X_i)=\dfrac{1}{4}\theta$，$E(X_{(1)})^2=E(\min\limits_i X_i)^2=\int_0^\theta 3x^2\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^2\dfrac{1}{\theta}dx=\dfrac{1}{10}\theta^2$，

$D(X_{(1)})=D(\min\limits_i X_i)=\dfrac{3}{80}\theta^2$，$D(\hat{\theta}_2)=\dfrac{3}{5}\theta^2$；

$\hat{\theta}_1=\dfrac{4}{3}\max\limits_i X_i$ 的方差最小。

【P49复习题】

1. 测量海岛棉与陆地棉杂交后的单铃籽棉重X（单位：g），若X～N（μ, 0.09），样本容量n＝15，样本均值$\bar{x}$＝2.88，(1)若总体标准差σ=0.3，试求总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限；

(2)若σ^2未知，样本标准差s=0.34，试求总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限及试求总体方差σ^2的置信水平为0.95的置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限。

答：(1)2.88±0.152，2.88+0.127，2.88—0.127；

(2)2.88±0.195，2.88+0.160，2.88—0.160；(0.066, 0.308)，0.264，0.073。

2. 调查13岁至14岁儿童的身高(单位:米)，(1)若容量n＝265，样本均值$\bar{x}$＝1.57，样本标准差s＝0.077，试求总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限；

(2)若容量n＝265，试求总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限及试求总体方差σ^2的置信水平为0.95的置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限。

答：(1)1.57±0.009，1.57+0.008，1.57—0.008；

(2)1.57±0.032，1.57+0.027，1.57—0.027；(0.004, 0.012)，0.011，0.004。

3. 某品种玉米分作两组作微肥施用量的对比试验，相互独立地抽出样本测量穗重得到观测值(单位：g)210, 235, 239, 241, 244, 256和203, 338, 358, 271，(1)若总体方差相同，试求总体均值差$\mu_1-\mu_2$的双侧0.95置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限；

(2)若总体方差不同，试求总体方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧0.95置信区间、单侧0.95的置信上限和单侧0.95的置信下限。

答：$\bar{x}$=237.5，s_1=13.913，$\bar{y}$=292.5，s_2=60.895，s_w=44.713。

(1) —55±66.556，—55+53.684，—55—53.684；(2) (0.003, 0.365)，0.254，0.005。

【P55复习题】

1. 设总体X服从N(μ, σ²)分布，X的样本容量为n，样本均值为$\overline{X}$，试论述σ²未知时，均值μ的双侧1—α置信区间为确($\overline{X}-t_{1-0.5\alpha}(n-1)\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$, $\overline{X}+t_{1-0.5\alpha}(n-1)\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$)，均值μ的单侧1—α置信区间分别为（$\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$，+∞）及（—∞，$\overline{X}+t_{1-\alpha}(n-1)\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$），式中的S*为样本的修正标准差。

解：当σ²未知时，统计量$\overline{X}\sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，给定置信概率1—α，查t分布的分位数表得到1—0.5α分位数$t_{1-0.5\alpha}(n-1)$和1—α分位数$t_{1-\alpha}(n-1)$，则

$$P\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}<t_{1-0.5\alpha}(n-1)\}=1-\alpha,$$

$$P\{\overline{X}-t_{1-0.5\alpha}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{1-0.5\alpha}(n-1)\frac{S^*}{\sqrt{n}}\}=1-\alpha,$$

因此得到均值μ的双侧1—α置信区间；

又 $P\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}<t_{1-\alpha}(n-1)\}=1-\alpha$， $P\{\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}<\mu\}=1-\alpha$，

$P\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S^*}{\sqrt{n}}}>-t_{1-\alpha}(n-1)\}=1-\alpha$， $P\{\mu<\overline{X}+t_{1-\alpha}(n-1)\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}\}=1-\alpha$，

因此得到均值μ的单侧1—α置信区间。

2. 设总体X服从N(μ, σ²)分布，X的样本容量为n，样本均值为$\overline{X}$，试论述μ未知时，方差σ²的双侧1—α置信区间为（$\dfrac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-0.5\alpha}(n)}$，$\dfrac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{0.5\alpha}(n)}$），方差σ²的单侧1—α置信区间分别为（$\dfrac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}$，+∞）及（0，$\dfrac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)}$）。

解：当μ已知时，统计量$\dfrac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，给定置信概率1—α，查χ²分布的

分位数表得到1—0.5α分位数$\chi^2_{1-0.5\alpha}(n)$、0.5α分位数$\chi^2_{0.5\alpha}(n)$、1—α分位数$\chi^2_{1-\alpha}(n)$和α分位数$\chi^2_{\alpha}(n)$，则$P\{\chi^2_{0.5\alpha}(n)<\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{1-0.5\alpha}(n)\}=1-\alpha$，

$$P\{\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-0.5\alpha}(n)}<\sigma^2<\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{0.5\alpha}(n)}\}=1-\alpha,$$

因此得到方差σ^2的双侧1—α置信区间；

又 $P\{\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n)\}=1-\alpha$，$P\{\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}<\sigma^2\}=1-\alpha$，

$P\{\chi^2_{\alpha}(n)<\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\}=1-\alpha$，$P\{\sigma^2<\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)}\}=1-\alpha$，

因此得到方差σ^2的单侧1—α置信区间。

3. 设总体X服从N（μ_1，σ_1^2）分布，总体Y服从N（μ_2，σ_2^2）分布，X的样本容量为m，Y的样本容量为n，两样本相互独立、均值为$\overline{X}$与$\overline{Y}$、离均差平方和为SSX与SSY，试论述当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$但$\sigma^2$未知，$s_w^2=\frac{SSX+SSY}{m+n-2}$时，均值差$\mu_1-\mu_2$的双侧1—α置信区间为

$$(\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-0.5\alpha}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{1-0.5\alpha}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}),$$

均值差$\mu_1-\mu_2$的单侧1—α置信区间分别为$(\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},+\infty)$及$(-\infty,\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}})$。

解：当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$但$\sigma^2$未知，$s_W^2=\frac{SSX+SSY}{n+m-2}$时，统计量$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m})$，$\frac{SSX+SSY}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2)$，$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$，给定置信概率1—α，查t分布的分位数表得到1—0.5α分位数$t_{1-0.5\alpha}(m+n-2)$和1—α分位数$t_{1-\alpha}(m+n-2)$，则$P\{\frac{|(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)|}{s_W\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<t_{1-0.5\alpha}(m+n-2)\}=1-\alpha$，

$P\{\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-0.5\alpha}(m+n-2)s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}<\mu_1-\mu_2<\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-0.5\alpha}$

$(m+n-2)\, s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\,\}$

$=1-\alpha$，因此得到均值差$\mu_1-\mu_2$的双侧$1-\alpha$置信区间；

又 $P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<t_{1-\alpha}(m+n-2)\}=1-\alpha$，

$P\{\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha}(m+n-2)\, s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}<\mu_1-\mu_2\}=1-\alpha$，

$P\{\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}>-t_{1-\alpha}(m+n-2)\}=1-\alpha$，

$P\{\mu_1-\mu_2<\overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha}(m+n-2)\, s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\}=1-\alpha$，

因此得到均值差$\mu_1-\mu_2$的单侧$1-\alpha$置信区间。

4. 设总体X服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$分布，总体Y服从$N(\mu_2, \sigma_2^2)$分布，X的样本容量为m，Y的样本容量为n，两样本相互独立、均值为$\overline{X}$与$\overline{Y}$，试论述当μ_1和μ_2已知时，方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧$1-\alpha$置信区间为（$\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{1-0.5\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}$，$\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{0.5\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}$），

方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的单侧$1-\alpha$置信区间分别为

（$\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{1-\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}$，$+\infty$）及（0，$\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}$）。

解：统计量$\frac{\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m)$，$\frac{\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n)$，

$\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2\sigma_2^2}{m\sum_j(Y_j-\mu_2)^2\sigma_1^2}\sim F(m,n)$，给定置信概率$1-\alpha$，查F分布的分位数表得到$1-0.5\alpha$分位数$F_{1-0.5\alpha}(m,n)$、$0.5\alpha$分位数$F_{0.5\alpha}(m,n)$和$1-\alpha$分位数$F_{1-\alpha}(m,n)$、$\alpha$分位数$F_{\alpha}(m,n)$，则

$$P\{F_{0.5\alpha}(m,n)<\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2\sigma_2^2}{m\sum_j(Y_j-\mu_2)^2\sigma_1^2}<F_{1-0.5\alpha}(m,n)\}=1-\alpha,$$

$$P\left(\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{1-0.5\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{0.5\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}\right)=1-\alpha,$$

因此得到方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧1—α置信区间；

又 $P\{\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2\sigma_2^2}{m\sum_j(Y_j-\mu_2)^2\sigma_1^2}<F_{1-\alpha}(m,n)\}=1-\alpha$，$P\{\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{1-\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\}=1-\alpha$，

$P\{F_{\alpha}(m,n)<\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2\sigma_2^2}{m\sum_j(Y_j-\mu_2)^2\sigma_1^2}\}=1-\alpha$，$P\{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{n\sum_i(X_i-\mu_1)^2}{mF_{\alpha}(m,n)\sum_j(Y_j-\mu_2)^2}\}=1-\alpha$，

因此得到方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的单侧1—α置信区间。

5. 设总体X的100件样品中有40件特等品，试求特等品率p的单侧0.95置信区间。

答：所求的单侧1—α置信区间可以是：

1）$(\overline{X}-u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}, +\infty)$或$(-\infty, \overline{X}+u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}})$；

2）$(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, +\infty)$或$(-\infty, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$，

式中的$a=n+u_{1-\alpha}^2$，$b=-(2n\overline{X}+u_{1-\alpha}^2)$，$c=n(\overline{X})^2$。

本题中$u_{0.95}$=14，$\overline{x}$=0.4，所求特等品率p的单侧0.95置信区间分别是（0.319, +∞）及（—∞，0.481）。或a=102.706，b=—82.706，c=16，所求特等品率p的单侧0.95置信区间分别是（0.323, +∞）及（—∞，0.482）。

6. 调查100株玉米，发现20株受到玉米螟的危害，试计算危害率p的双侧0.95置信区间、单侧0.95置信上限和单侧0.95置信下限。

答：所求的双侧1—α置信区间是(0.122, 0.278)，单侧0.95置信上限是0.234，单侧0.95置信下限是0.134；或双侧1—α置信区间是(0.133, 0.289)，单侧0.95置信上限是0.273，单侧0.95置信下限是0.142。