§1.2 随机变量的重要分布

例 2.1《上抛硬币》上抛硬币 40 次，若正面朝上的次数为 X，试用二项概率公式及二项分布的正态近似法求 P{X=20}。

解：n=40，p=$\frac{1}{2}$，根据二项概率公式

P{X=20}=$C_{40}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$=0.1254；

用二项分布的正态近似法求 P{X=20}时，考虑到离散型随机变量与连续型随机变量的差异，将所求的概率化为 P{19.5<X<20.5}后，由 np=20，np(1–p)=10 得到

P{X=20}=P{19.5<X<20.5}=P$\left\{\frac{19.5-20}{\sqrt{10}}<\frac{X-20}{\sqrt{10}}<\frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\right\}$

=P$\left\{-0.16<\frac{X-20}{\sqrt{10}}<0.16\right\}$≈$F_{0,1}$ (0.16)– $F_{0,1}$ (–0.16)=0.1272。

例 2.2《卖电视机》某电视机商店估计，到该店的顾客中 15% 的人会购买进口货，45%的人会购买国产货。如果在某一天有 50 个顾客光临，试求恰好卖出 10 台进口货、20 台国产货的概率。

解：若将题中的 15%和 45%理解为到此商店的顾购买进口货或国产货的概率，并将各个顾客的购买意向看作是相互独立的，那么，该商店卖出进口货的台数为 X_1，卖出国产货的台数为 X_2 时，(X_1, X_2)～B(n, p_1, p_2)，而 n=50，p_1=0.15，p_2=0.45，所求的概率为 P{ X_1=10, X_2=20}=$\frac{50!}{10!20!20!}(0.15)^{10}(0.45)^{20}(0.4)^{20}$=0.01。

例 2.3《熟悉方法》设(X,Y)服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 分布，试写出 X 与 Y 的协方差矩阵及相关系数矩阵。

解：本先计算 $\rho(X,Y)$。因为 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ exp{※}，

$$※=-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right],$$

而 $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\}$，

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\},$$

$(-\infty<\mu_1<\infty,-\infty<\mu_2<\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1\le\rho\le 1)$

$E(X)=\mu_1, E(Y)=\mu_2, D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2,$

以下证明$\rho(X,Y)=\rho$。因为$\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$

$$=\iint_{xoy}(x-\mu_1)(y-\mu_2)p(x,y)dxdy=\rho\sigma_1\sigma_2,\ \rho(X,Y)=\rho,$$

$$COV(X,Y)=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}, CORR(X,Y)=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}。$$

例 2.4《熟悉方法》设随机变量 X_1、X_2、…、Xn 相互独立，且都服从区间(0,2)上的均匀分布，试求

$Y=\max\limits_{1\le i\le n} X_i$ 与 $Z=\min\limits_{1\le i\le n} X_i$ 的分布密度。

解：X_1、X_2、…、Xn 相互独立，且都服从区间(0,2)上的均匀分布，$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他地方},\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2\\ 1, & 2<x,\end{cases}$

$$p^*_{\max}(y)=n[F(y)]^{n-1}p(y)=\begin{cases}n\left(\frac{y}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他地方},\end{cases}$$

$$p^*_{\min}(z)=n[1-F(z)]^{n-1}p(z)=\begin{cases}n\left(1-\frac{z}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其他地方。}\end{cases}$$

习题 1.2

1．袋中有 2 个白球、2 个黑球、3 个红球，用取后放回的方法取出 n 个球，若取出的白球数为 X，取出的黑球数为 Y，试写出（X，Y）的分布律。

2. 一粒均匀的骰子投掷 9 次，求 1 点出现 3 次，2 点及 3 点各出现 2 次的概率。

3．当 $X=(X_1,X_2)'$ 服从二维正态分布时，计算

$$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)。$$

4．设 X_1、X_2、…、Xn 相互独立，且都服从 E(k)分布，

分布密度为 $p(x)=\begin{cases} k e^{-k x}, & 0<x \\ 0, & \text{其他地方}, \end{cases}$

分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-e^{-k x}, & 0<x, \end{cases}$

试求 $P\{\max\limits_{1 \le i \le n} X_i < a\}$ **与** $P\{\min\limits_{1 \le i \le n} X_i < a\}$**，式中的** $a > 0$**。**