2014年大连交通大学601高等代数考研样题

一、(15分)设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，证明：如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 不能有整数根。

二、（15分）设四元齐次方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} 2x_1 \quad +3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$，又已知另一个四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为：

$$\eta_1 = (2,\ -1,\ a+2,\ 1)^T,\quad \eta_2 = (-1,\ 2,\ 4,\ a+8)^T$$

（1）求方程组(Ⅰ)的一个基础解系；（5分）

（2）当 a 为何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解。（10分）

三、(15分) 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵，证明：$rank(A^T A) = rankA$。

四、（15分）计算下列各题

（1）设 A, B, C 都是行列式值为2的3阶方阵，求 $\begin{vmatrix} O & -A \\ (\frac{2}{3}B)^{-1} & C \end{vmatrix}$。（8分）

（2）设 $A^3 = 0$，求 $(E + A + A^2)^{-1}$。（7分）

五、（15分）设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶实反对称矩阵，证明：$A - B^2$ 为正定矩阵。

六、（15分）已知 $P^{n\times n}$ 的两个子空间

$$S_1 = \left\{ A \middle| A^T = A, A \in P^{n\times n} \right\},\quad S_2 = \left\{ A \middle| A^T = -A, A \in P^{n\times n} \right\}$$

证明：$P^{n\times n} = S_1 \oplus S_2$。

七、（15分）设4阶实方阵 A 满足条件 $\left|A + \sqrt{3}E\right| = 0$，且 $|A| = 9$，求

（1）A^* 的一个特征值；（8分）　　（2）$|A|^2 A^{-1}$ 的一个特征值。（7分）

八、（15分）在 $P^{n\times n}$ 中定义变换：

$$\Re(X) = AXB + CX + XD \quad (\forall X \in P^{n\times n},\ A, B, C, D \in P^{n\times n} \text{ 取定})$$

（1）证明：$\Re$ 是线性变换。（7分）

（2）证明：当$C=D=O$时，$\Re$是可逆变换的充要条件是A,B都是可逆矩阵。（8 分）

九、（15 分）设有$n+1$个列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta\in R^n$，$A$是一个$n$阶正定矩阵，如果满足下列条件：

（1）$\alpha_j\neq 0\ (j=1,2,\cdots,n)$；　（2）$\alpha_i^T A\alpha_j=0$（$i,j=1,2,\cdots,n$且$i\neq j$）；

（3）β与每一个α_j都正交。

证明：$\beta=0$。

十、（15 分）已知P^3的线性变换：$\Re(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$，求$\Re P^3$与$\Re^{-1}(0)$的基与维数。