信号与系统

Signals & Systems

陆 建 华

清华大学电子工程系

2004年春季学期

§3.1 引言

什么是变换？ 通过提取信号特征进行信号分析的一种工具，（数学工具）

简言之，一种特征 $\xrightarrow{\text{变换}}$ 另一种特征

傅立叶变换：

（$\mathcal{F}$-变换）时域（时间域）→频域（频率域）

本章的思路：

傅立叶级数→付立叶变换→卷积定理→抽样定理

本章的意义：

作为信号与系统分析的一种非常重要的工具

① 可广泛应用于通信及数字信号处理领域

② 也是研究其它变换方法的基础

③ 本课程重中之重

本章的重点：

$\mathcal{F}$ -变换的性质与应用

卷积定理

抽样定理

§3.2 傅立叶级数

1822 Fourier 证明了将周期信号展开为正弦级数原理

$\Rightarrow$ 傅立叶级数

（一） 三角函数形式级数展开（正交函数集 $\{\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$ ）

周期函数 $f(t)$，周期为 T_1，角频率为 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$， 频率 $f_1 = \dfrac{1}{T_1}$

当：
- 信号周期内间断点数有限
- 信号周期内极大/极小值数目有限
- 一周期内信号可积 $\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| dt < \infty$

$\Rightarrow$ Dirichlet条件

可展开：$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$

其中： $a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)dt$ 直流分量

$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt$ 余弦分量

$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t dt$ 正弦分量

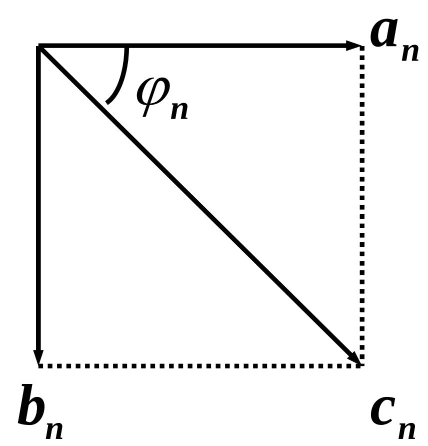
根据三角函数的性质，可将余弦分量和正弦分量合并：

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(n\omega_1 t+\varphi_n\right)$$

$$c_0=a_0$$ （直流分量不变）

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\varphi_n=-tg^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$



注意：

对于偶函数 $b_n = 0$, $a_n > 0 \Rightarrow \varphi_n = 0$ ；

$a_n < 0 \Rightarrow \varphi_n = -\pi$

同样，还可以有另一种形式：

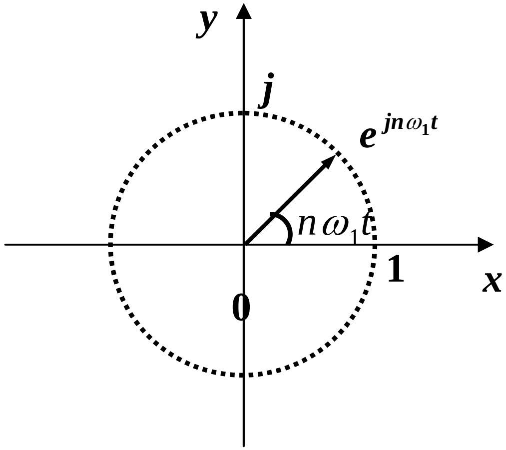
$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(n\omega_1 t + \theta_n\right)$$

请同学们课后推导d_0、d_n的表示式。

（二）指数形式级数展开：（正交函数集 $\left\{e^{jn\omega_1 t}\right\}$）

欧拉公式：$e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j\sin n\omega_1 t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos n\omega_1 t = \dfrac{1}{2}\left(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}\right) \\ \sin n\omega_1 t = \dfrac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}\right) \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right)$$

$$\triangleleft\| \qquad\qquad \triangleleft\| \qquad\qquad \triangleleft\|$$

$$F(0) = F_0 \quad F(n\omega_1) = F_n \quad \boldsymbol{F(-n\omega_1) = F_{-n}}$$

$$\Rightarrow \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$\boldsymbol{F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt}$$

（同学可自行推导）

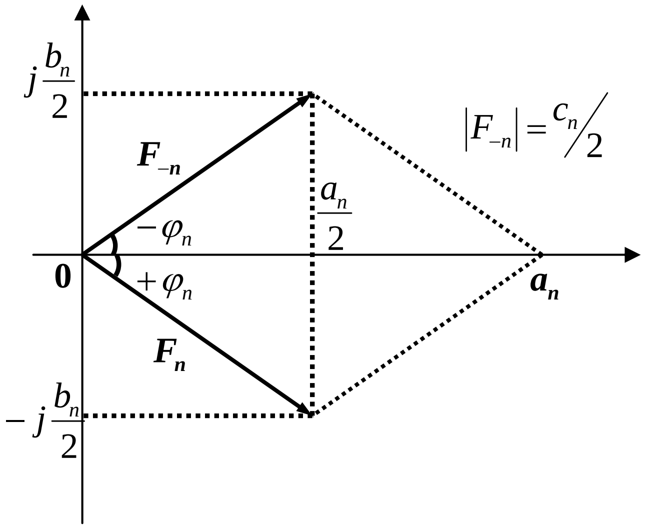
F_n与其它系数的关系：

$$\boldsymbol{F_0 = a_0 = c_0}$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$ ，φ_n仍为$\boldsymbol{c_n}$对应的φ_n

$$\boldsymbol{|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

利用下图矢量分解：



须注意的两个现象：

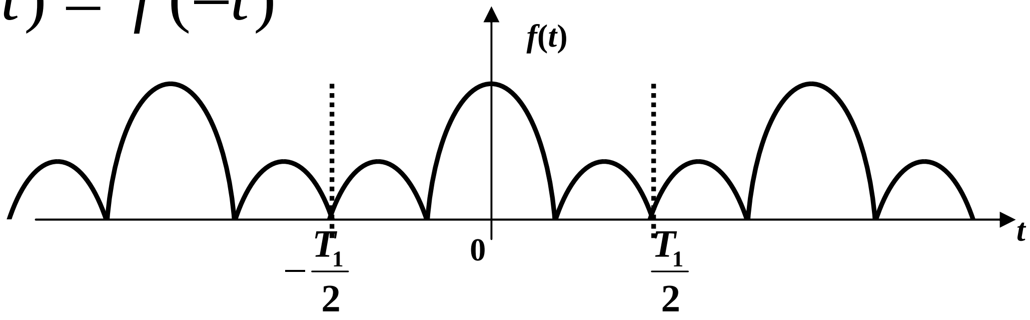
(1) $f(t)$展开式中包含复数（数学变换的结果）

(2) 出现负频率分量 （原正频率分量的能量减半）

负频率没有物理意义，不会在实际系统中出现，其引入给信号分析带来便利。

（三）函数的对称性与傅立叶系数的关系

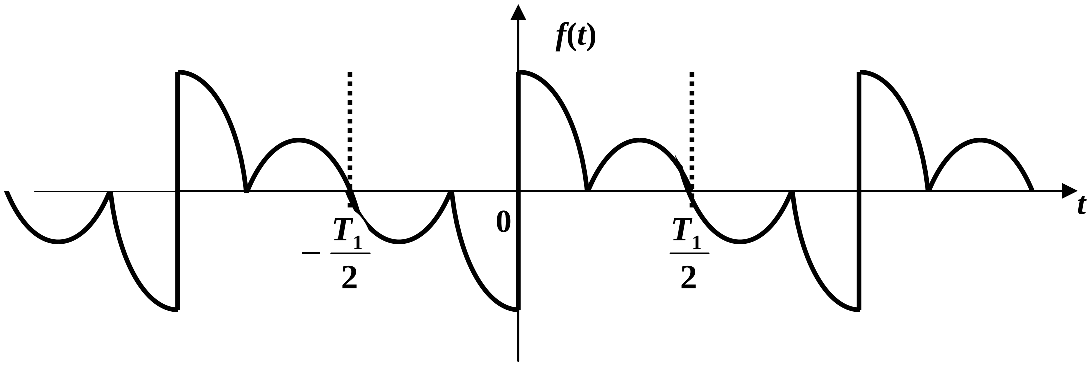
（1）偶函数 $f(t)=f(-t)$



$b_n=0$ （正弦分量） $\Rightarrow \boldsymbol{c_n}=\boldsymbol{a_n}$， $\varphi_n=0$

$$F_n=F_{-n}=\frac{1}{2}a_n$$

（2）奇函数 $f(t)=-f(-t)$



$$\Rightarrow a_0=0\,,\ a_n=0 \quad \text{（余弦分量）}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{c_n}=\boldsymbol{b_n},\ \varphi_n=-\pi/2$$

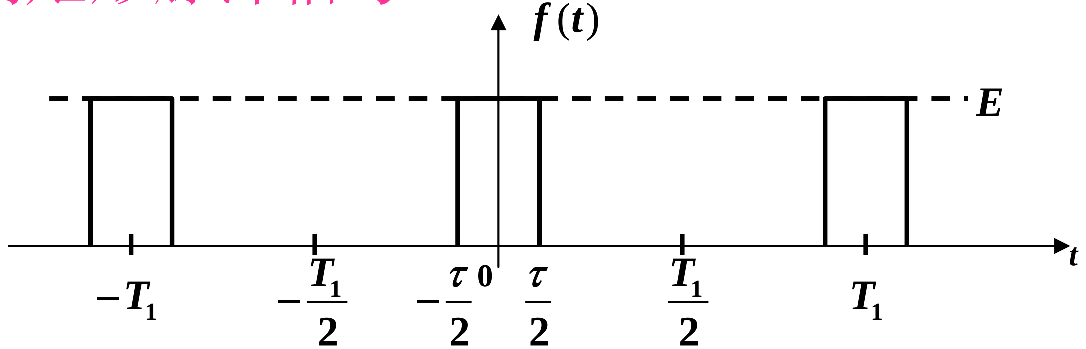
$$F_n=F_{-n}=-\frac{1}{2}jb_n$$

（3）奇谐函数 $f(t)=-f\left[t\pm\frac{T_1}{2}\right]$ P95-97 自学

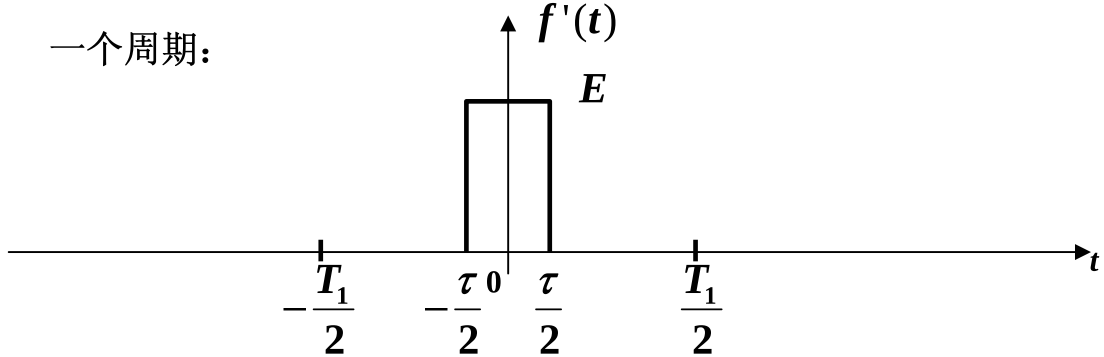
（四）有限级数 P97-101 自学

§3.3 典型周期信号的傅里叶级数

(一) 周期矩形脉冲信号



一个周期：



$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}Ee^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ee^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$=\frac{E}{T_1}\left(\frac{1}{-jn\omega_1}\right)e^{-jn\omega_1 t}\bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{2E}{T_1 n\omega_1}\cdot\frac{e^{-jn\omega_1\tau/2}-e^{jn\omega_1\tau/2}}{-2j}$$

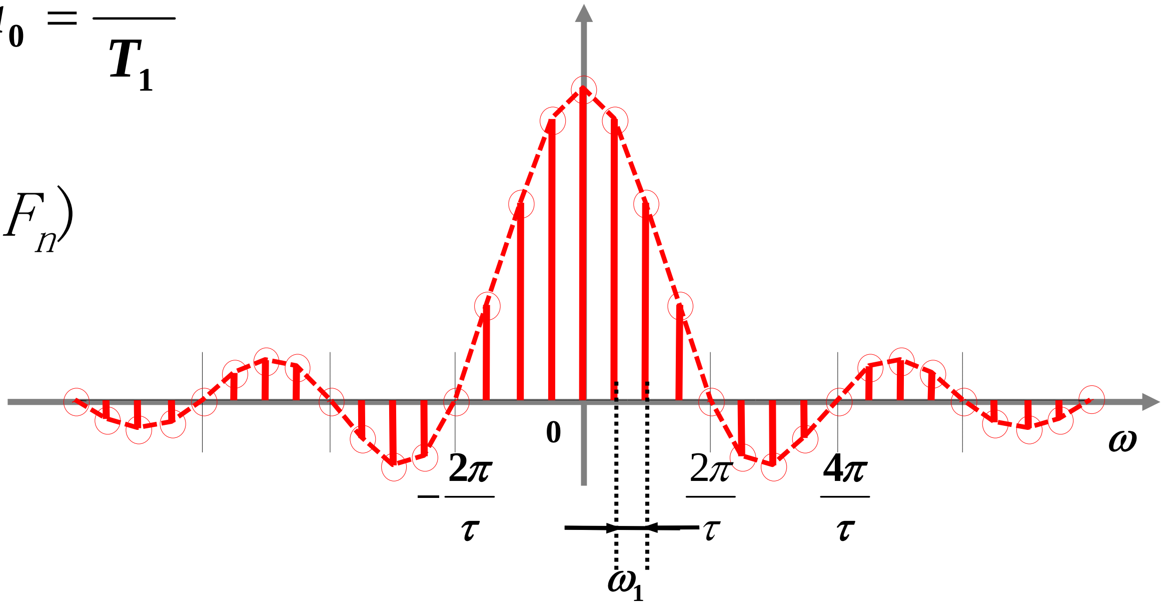
$$=\frac{E\tau}{T_1}\cdot\frac{\sin\frac{n\omega_1\tau}{2}}{\frac{n\omega_1\tau}{2}}=\frac{E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

偶对称：三角函数形式展开，有 $b_n = 0$

$$c_n = a_n = 2F_n = \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$c_0 = a_0 = \frac{E\tau}{T_1}$$

频谱图 (F_n)



注意：

偶对称函数 $b_n = 0$，$\varphi_n = 0, \pi$，F_n 可由一图示出

一般情况：

$$F_n = \left|F_n\right| e^{j\varphi_n}$$

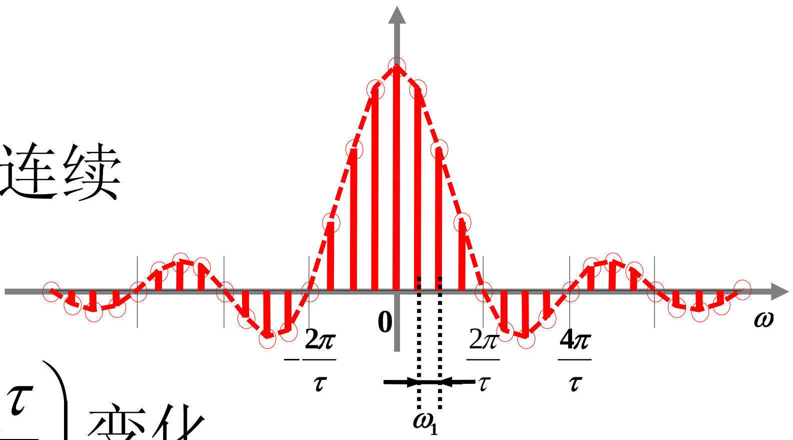
$\left|F_n\right|$ 频谱幅度图，φ_n 频谱相位图

以周期矩形脉冲为例说明周期信号谱特点（频谱分析要点）

（1）周期信号的频谱离散，谱线间隔 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$

T_1越大，谱线越密

$T_1 \to \infty$，非周期信号，频谱连续



$\Rightarrow$ 一般信号 $\mathcal{F}$ 变换

(2) 幅度按$S_a\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$或$S_a\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$变化

当 $\omega = \frac{2m\pi}{\tau}$，谱线包络过零

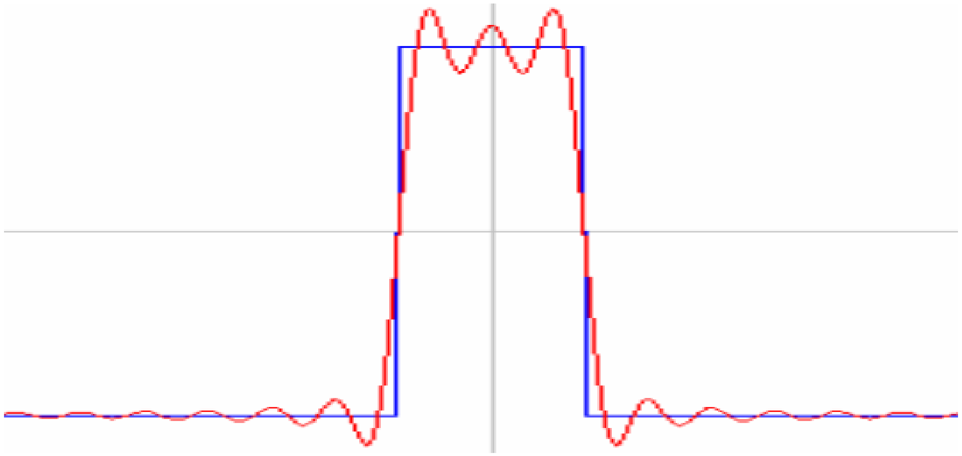
(3) 周期信号含有无穷多条谱线，但根据其包络，能量主要集中在第一个零点内$\left(0 \sim \frac{2\pi}{\tau}\right)$，即低频信号能量大。

定义 $B_W = \dfrac{2\pi}{\tau}$ 为信号带宽，$B_W \propto \dfrac{1}{\tau}$

信号带宽须与传输信道匹配 $\Rightarrow$ 传输系统设计内容之一

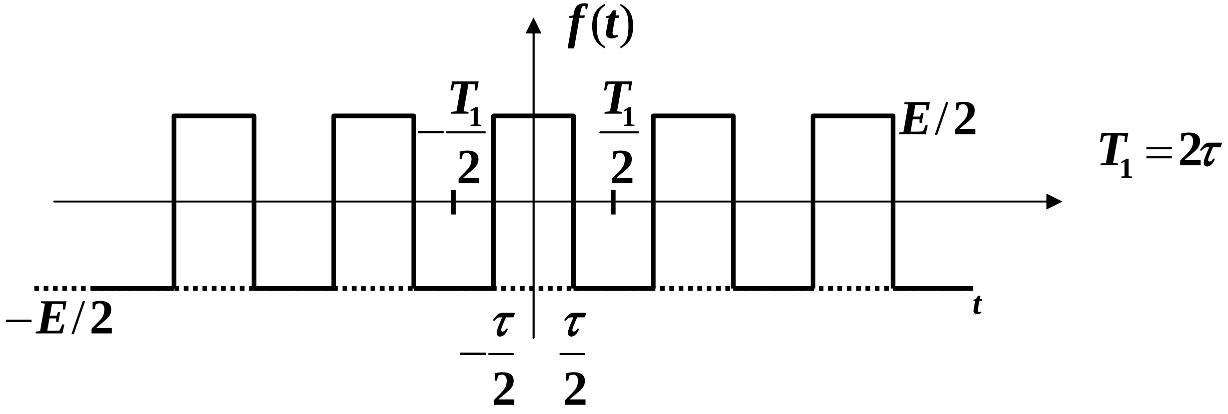
采用信号带宽传输信号，去除高端频谱成份，

波形略有失真，但基本保持原形状。



吉布斯现象

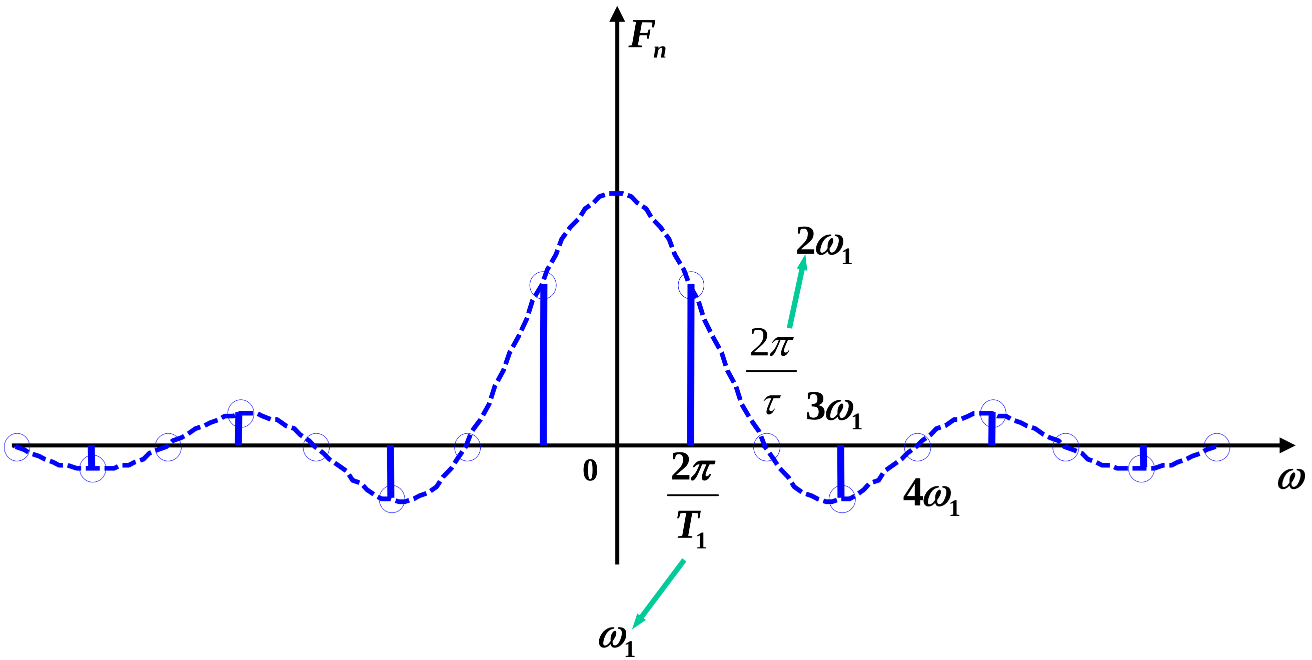
(二)矩形对称方波周期信号:(特例)



(1) 偶对称 $b_0=0$ 无正弦分量

(2) 正负交替,直流分量(a_0)为零

参照周期矩形脉冲频谱可得:



偶次谐波=0！！

由 $|F_n|$ 或 c_n 公式(周期矩形脉冲信号)求基波及奇次谐波系数：

$$c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\left|Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\right| \qquad (即\ 2|F_n|)$$

当 $n=1$ $$\frac{2E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{1\cdot\omega_1\tau}{2}\right)=\frac{2E\tau}{2\tau}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2E}{\pi}$$

$n=3$ $$=-\frac{2E}{\pi}\times\frac{1}{3}$$

$n=5$ $$=+\frac{2E}{\pi}\times\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow\ f(t)=\frac{2E}{\pi}\left[\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t+\cdots\right]$$

思考题13：100HZ的对称方波信号中有无200HZ的频率成分？

结论：

T ↗谱线间隔↘　　　　零点不动

τ↗谱线间隔不动　　　　第一零点左移，信号带宽变窄

T↗or τ ↘　　　　频谱幅度压低(能量减小，相同E)

(三) 周期锯齿脉冲信号$\mathcal{F}$级数展开（自行推导）

（四）周期三角脉冲信号 $\mathcal{F}$ 级数展开（自行推导）

（五）周期半波余弦信号 $\mathcal{F}$ 级数展开（自行推导）

（六）周期全波信号 $\mathcal{F}$ 级数展开（自行推导）

注意：**利用函数的对称性质**

偶函数 $f(t)=f(-t)$ ，$b_n=0$

奇函数 $f(t)=-f(-t)$ ，$a_n=0$

奇谐函数 $\boldsymbol{f(t)=-f(t\pm\frac{T_1}{2})}, a_0=0$，偶次谐波为0。

本节课小结：

傅里叶级数(周期信号)

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

$$\boldsymbol{F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}$$ 简记 $\boldsymbol{F_n}$

周期矩形： $\boldsymbol{F_n=\frac{E\tau}{T_1}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)}$

（1） 谱线间隔 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$

（2）包络线零点 $m \cdot \frac{2\pi}{\tau}$ m为整数

（3）带宽 $\boldsymbol{B_W = \frac{2\pi}{\tau}}$

下节课： 傅立叶变换—非周期信号的频谱分析

课后作业： 3-5，3-9

思考题： 13

参考书： Oppenheim 3.3