2005 年新疆大学高等代数考研试题

新疆大学2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

报考学科专业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论
报考研究方向：各方向共用
考试科目：421高等代数

考生注意：无论何种题型，考生答案请写在考场所发的答题纸上，写在试题上一律不予计分

一.（50分）判断以下命题是否正确．若正确给出证明，若错误给出反例．

(1) 设$f(x),g(x)$是实数数域上的两个多项式，且它们的最大公因式是一个不可约多项式。则$f(x)$与$g(x)$至多有一个公共实根。（10分）

(2) 设R是实数域，$\alpha\in R$。令$D=\{f(x)\in R[x]\mid f(\alpha)=0\}$，且$g(x)$是$D$中次数最低的一个多项式。则对任何$f(x)\in D$，有$g(x)|f(x)$。（10分）

(3) 设A,B,C是三个3阶矩阵，且有相同的特征多项式$f(x)=(x-1)^2(x-2)$。则A,B,C中至少有两个是相似的．（10分）

(4) 向量组$A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r\}$，可以把向量组$B=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s\}$线性表出的充要条件是$A$的秩不小于$B$的秩。（10分）

(5) 线性变换$\mathcal{A}$可以把线性相关的向量组映射到线性无关的向量组。（10分）

二.（15分）设A是$n\times n$阶矩阵，且秩$(A)=r$。证明存在$n\times n$阶可逆矩阵P使$P^{-1}AP$的后$n-r$列全为0。

三.（20分）设A为一个2005级实对称矩阵，$|A|>0$，证明存在一个n维向量X使$X'AX>0$。

四.（20分）设$P^{n\times n}$是数域P上的n阶矩阵按加法构成的P上的线性空间。$A\in P^{n\times n}$。

(1) $C(A)=\{B\in P^{n\times n}\mid AB=BA\}$是$P^{n\times n}$的子空间。（10分）

(2) 当$A=diag(1,2,\dots,n)$时，求$C(A)$，并写出它的一组基。（10分）

五.（20分）设$\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换，$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$是V的一组基．设$\mathcal{A}(\xi_j)=j\xi_{n-j+1},j=1,2,\dots,n$，$A$是$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵，求$A$的行列式．

六.（25分）设$\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换，$\mathcal{A}(V)$为值域，$\mathcal{A}^{-1}(0)$为核。

(1) 证明$dim(\mathcal{A}(V))+dim(\mathcal{A}^{-1}(0))=n$。（10分）

(2) 如果$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$，证明$\mathcal{A}(V)+\mathcal{A}^{-1}(0)=V$。（5分）

(3) 设$r=dim(\mathcal{A}(V))$为子空间$\mathcal{A}(V)$的维数，证明存在V的一组基$e_1,e_2,\dots,e_n$使$\mathcal{A}(e_1),\mathcal{A}(e_2),\dots,\mathcal{A}(e_r)$是线性无关的，而$\mathcal{A}(e_j)=0,j=r+1,r+2,\dots,n$。（10分）