注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

2004年硕士研究生入学考试数学分析试题

注意：共九大题，满分150分。解答请一律写在答题纸上，务必写明题目序号。

一、计算下列各题（每小题8分，共40分）。

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

2. $\displaystyle\int\frac{\cos x\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$.

3. 求由方程 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的微分 dy.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$.

5. $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$.

二、(15分) 求曲线 $y=x^3\ (x\ge0)$ 的一条切线L，使界于曲线 $y=x^3$，切线L及直线 $y=0$ 和 $x=1$ 之间的面积为最小。

三、(15分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx$（$a\le x\le b$）。

证明：$\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$.

四、(15分) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$ 的收敛域。

五、(15分) 计算 $I=\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AOB}}\left(12xy+e^y\right)dx-\left(\cos(y)-xe^y\right)dy$，其中

$\overset{\frown}{AOB}$ 为由点A(-1, 1)沿曲线 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ 到点 O (0, 0) 再沿直线

$y=0$ 到B(1, 0)的路径。

六. (10分)设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，定义：

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta\\ x',x''\in I}}\left|f(x')-f(x'')\right|.$$

证明：$f(x)$ 在 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(\delta)=0$.

七. (10分)设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，满足：对每一点 $x_0\in[a,b]$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对 $x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$，成立 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值.

八. (10分)设 $f(x,y)=\varphi(|xy|)$，其中 $\varphi(0)=0$，φ 在 $u=0$ 附近满足 $\varphi(u)\le u^2$. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

九. (20分)设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=2$，$f'(0)=0$. 已知方程

$$\left(xy^2-f(x)y\right)dx+\left(x^2y-f'(x)\right)dy=0$$

为全微分方程.

1. 求出 $f(x)$.

2. 求出全微分方程的通解.