兰州大学2005年招收攻读硕士学位研究生考试试题

注意：答案请一律写在答题纸上，写在试题上无效。

招生专业：地学类各专业　　　　考试科目：高等数学（地学类）

一、填空题（共6小题，每小题4分，满分24分）

(1)、设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(\cos x)$ 的定义域是 $2k\pi$ [illegible]，其中 $k\in N$

(2)、设函数 $y=x^{\cos\frac{1}{x}}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ______.

(3)、已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}dx=$ ______.

(4)、设 $\int_0^{y} f(x-y)dx=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{x+y}-e^{\sin y}$，其中 $f(x)$ 连续，则 $f(x)=$ $2e^{2}-e^{[illegible]}$

(5) 微分方程 $(1-x^2)y'+xy=1$，满足 $y|_{x=0}=1$ 的特解是 $y=$ [illegible]

(6)、设 A,B 都是 n 阶方阵，$AB=E$，则 $A^2B^2A=$ A .

二、单项选择题（共6小题，每小题4分，满分24分）

(1)、把3个无穷大量 $a_n=\int_1^n|\sin\pi x|dx$、$b_n=\int_1^n\dfrac{1}{1+x}dx$、$c_n=\int_1^n\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ $(n\to\infty)$ 排列起来，使排在后面者是其前一个的高阶无穷大量，则正确的排序是（　　）.

(A). $a_n、b_n、c_n$；(B) $a_n、c_n、b_n$；(C) $b_n、a_n、c_n$；(D) $c_n、a_n、b_n$.

(2)、设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，则下面正确的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛；(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛.

(3)、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，又函数 $\varphi(x)$ 可导，则 $F(x)=\varphi[f(x)]$ 在 $x=0$ 点为（　　）.

(A) 不连续；(B) 不可导；(C) 可导且导数为 $\varphi'(0)$；(D) 可导且导数为零。

(4)、下列广义积分收敛的是（　　）.

(A) $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$；(B) $\int_0^{+\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^3}dx$；(C) $\int_{-1}^1\dfrac{dx}{\sin x}$；(D) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^x}{x^{2005}}dx$；

(5)、设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_0^t\left[\int_0^x f(t)dt\right]dx=$（　　）.

(A) $\int_0^t f(x)(t-x)dx$；(B) $\int_0^x f(t)(t-x)dt$；

(C) $\int_0^t f(t)(x-t)dx$；(D) $\int_0^x f(t)(x-t)dt$.

(6)、设 A 为3阶方阵，B 为4阶方阵，且行列式 $|A|=a$，$|B|=b$，

则 $\begin{vmatrix} 0 & 3A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $3ab$；(B) $-3ab$；(C) $27ab$；(D) $-27ab$.

三（10分）、求通过点 $M(1,-1,1)$，且垂直于两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 的平面方程。

四（12分）、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n+1}$ 的和函数，并由此计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2\times 4^n}$ 的和。

五（10分）、设 L 是由 $A(2a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=2ax$，求曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-1)dy$.

六（10分）计算三重积分 $\iiint_V z^2dxdydz$，其中区域V为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$。

七（12分）求微分方程 $y''+3y'+2y=3(\sin x+xe^{-x})$ 的通解。

八（12分）、λ 为何值时线性方程组 $\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\ x+(\lambda+1)y+z=1\\ x+y+\lambda z=1\end{cases}$ 无解，有惟一解，有无穷多解？有解时求其全部解。

九（12分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -b & -1 & a\\ b & 4 & -1\end{pmatrix}$，$\xi=(2,0,1)^T$ 为A的特征向量，

(1) 求 a，b 的值以及A的特征值与特征向量；

(2) 判断A能否相似于对角矩阵，若能，求可逆矩阵P使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

十（12分）、若实二次型 $x_1^2+6x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2+2ax_1x_3$ 为正定二次型，试确定 a 的取值范围。

十一（12分）、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可微，$f(0)=0$ 且 $0\le f'(x)\le 2f(x)$，证明 $f(x)$ 恒等于0。