西安电子科技大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目代码及名称： 311 数学分析

考 试 时 间 ： 2005年1月23日上午（3小时）

答题要求：所有答案（填空题按照标号写）必须写在答题纸上，写在试卷上一律作废！准考证号写在指定位置。

一.（25分）填空（答案必须按题号写在答题纸上）

1. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+f(x)\sin x)}{\tan x}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

2. 设$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则当$\alpha$____时，$f$在$x=0$处连续；当$\alpha$____时，$f$在$x=0$处可导且$f'(0)=$________.

3. 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$，则$\int_1^3 f(x-2)dx=$________.

4. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx=$________.

5. 设$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leq 0\\ 1+x^2, & 0<x\leq\pi\end{cases}$，则其以$2\pi$为周期的傅立叶级数在$x=\pi$处收敛于________.

二.（10分）设函数$u=f(x,y,z)$具有连续偏导数，且$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定，求du.

三.（16分）计算下列各题

1. $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$.

2. $\oint\limits_C (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中$C$是曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$从$z$轴正向往$z$轴负向看$C$的方向是顺时针的.

四.（12分）求$\iint\limits_\Sigma\dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a>0$为常数.

五.（12分）设$x_1>0$，且$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，$n=1,2,\cdots,n$，证明$\{x_n\}$收敛并求其极限.

六.（10分）求 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+\frac{1}{n})^n$ 的收敛域，并判定其一致收敛性.

七.（13分）讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点的个数，其中 k 为参数.

八.（13分）（1）证明 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续。

（2）设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且有

$$\lim_{\substack{x->0 \\ y->0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$$

试问 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点？请说明理由。

九.（13分）设 f 在 $[0,1]$ 上连续、非负、递减，$0<\alpha<\beta<1$，证明

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \frac{\alpha}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

十.（13分）设 f 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明

1. 存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=0$；
2. 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$；
3. 存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=f(\eta)$.

十一.（13分）设 f 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，且 $f''(0)$ 存在，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛的充分必要条件是 $f(0)=f'(0)=0$.