理学院

西 安 电 子 科 技 大 学

2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目代码及名称 671 数学分析

考试时间 2007年1月21日上午（3小时）

答题要求：所有答案（填空题按照标号写）必须写在答题纸上，写在试卷上一律作废，准考证号写在指定位置！！

一、选择题($6\times5=30$分).

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点的邻域内（　　）.

A. 有界；　　B. 无界；　　C. 单调增加；　　D. 单调减少.

2. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$, 且 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶连续导数, 则下列选项正确的是（　　）.

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值；　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

3. 设方程 $x+z=y\cdot f(x^2-z^2)$（其中 f 可微）确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 则 $z\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

A. x；　　B. y；　　C. z；　　D. $y\cdot f(x^2-z^2)$.

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-2)^n$ 在 $x=4$ 处发散, 则其在 $x=0$ 处（　　）

A. 绝对收敛；　　B. 条件收敛；　　C. 发散；　　D. 无法判定.

5. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上可导，则（　　）.

A. 当 $f'(x)$ 为单调函数时，$f(x)$ 一定为单调函数;

B. 当 $f(x)$ 为单调函数时，$f'(x)$ 一定为单调函数;

C. 当 $f'(x)$ 为偶函数时，$f(x)$ 一定为奇函数;

D. 当 $f(x)$ 为偶函数时，$f'(x)$ 一定为奇函数.

二、填空题$(6\times5=30$分).

1. 设 $E=(0,1)\cup\{2\}$, 则 $\inf E=$ ________, $\sup E=$ ________.

2. 设 $x_n=(-1)^n\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

3. 已知 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+\sin x}{x}, & x\neq0\\ b, & x=0\end{cases}$, 其中 $f(x)$ 有连续的导数, 且 $f'(0)=2$,

若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $b=$ ______.

4. 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数，则 $f^{(n)}(a)=$ ________.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=12$ 的某邻域内可导, 且 $\lim\limits_{x\to12}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to12}f'(x)=A$, 则

$$\lim_{x\to12}\frac{\int_{12}^{x}\left[t\cdot\int_{t}^{12}f(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}t}{(12-x)^3}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

三、(10 分)　已知 $f(x)=xe^{-x}+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

四、(10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^m\sin(1/x), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,其中 m 为正整数. 问: m 满足什么条件, 在 $x=0$ 点分别有: (1) $f(x)$ 连续. (2) $f(x)$ 可导. (3) $f'(x)$ 连续.

五、(10 分) 由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成一立体, 其体密度为 $\mu=\sqrt{x^2+y^2}$, 求此立体的质量 M.

六、(10 分) 计算曲面积分 $\iint\limits_S (z-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲面 $2z=x^2+y^2$ 介于 $z=2$ 及 $z=3$ 之间部分的下侧.

七、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)\neq 0, f(a)=f(b)=0$,

试证: (1) $\forall x\in(a,b)$, 有 $f(x)\neq 0$;

(2) $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 其傅里叶系数为 $a_n(n=0,1,2,\cdots), b_n(n=1,2,\cdots)$. 验证 $C(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 是以 2π 为周期的连续函数; 求函数 $C(x)$ 的傅里叶系数 $A_n(n=0,1,2,\cdots), B_n(n=1,2,\cdots)$.

九、(10 分) 设 $F(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\mathrm{d}y$, $G(x)=\left(\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^2$ $(x\geq 0)$. 试证: 当 $x\geq 0$ 时, $F(x)+G(x)=\pi/4$.

十、(10 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有连续导数, $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, $f_n(x)=n\cdot[f(x+1/n)-f(x)]$.

证明: (1) $f_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $f'(x)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$.

十一、(10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且满足:

(1) $\forall x\in[a,b]$, $f_1(x)\ge f_2(x)\ge\cdots\ge f_n(x)\ge\cdots$,

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 处处收敛.

试证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值.