西北大学一九九九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目： 高 等 代 数

适用专业： 基 础 数 学

一、设$f(x)$为满足下列条件的次数最大的整系数多项式：

1) $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+p$，$p$为质数；2) $f(x)$恰有n个不同的有理根

试求$f(x)$的次数n及所有根.

二、设 A 为 n 阶实对称阵. 证明：

a) 对应于 A 的所有不同特征值的特征向量必线性无关；

b) 对应于 A 的任意两个不同特征值的特征向量必正交.

三、设 λ 为实数，向量组 α_1，α_2，…，α_n （$n>2$）线性无关. 试讨论向量 $\alpha_1+\lambda\alpha_2$，$\alpha_2+\lambda^2\alpha_3$，…，$\alpha_{n-1}+\lambda^{n-1}\alpha_n$，$\alpha_n+\lambda^n\alpha_1$ 的线性相关性与线性无关性，并证明你的结论.

四、利用正交线性替换化实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$$

为标准形，并写出所施行的正交变换过程.

五、证明对任意 $m\times n$ 阶矩阵 A 及 $n\times m$ 阶矩阵 B 有行列式值等 $|E_m+AB|=|E_n+BA|$，其中 E_n 表示 n 阶单位阵. $\begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix}$ 对此行变列变. 化为 $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

六、设 V_1 及 V_2 是向量空间 V 的两个子空间，$P_1=V_1+\alpha$，$P_2=V_2+\beta$，其中 α，$\beta\in V$. 证明 $P_1=P_2$ 当且仅当 $V_1=V_2$ 且 $\alpha-\beta\in V_1$.

七、设 A 为复数域上的 n 阶矩阵. 如果存在某一正整数 $k\geq 2$ 使得 $A=A^k$. 则对任意非零复数 λ，证明矩阵 $\lambda E-A$ 与 $E-\lambda A$ 同时可逆或同时不可逆. 这里 E 为 n 阶单位阵.

八、设 n 阶对称阵 A 有 n 个不同的特征值. 证明任意与 A 可交换的矩阵必为对称阵.

（注：前四题每题 10 分，后四题每题 15 分.）