西北大学 2003 年招收攻读硕士学位研究生试题

科目名称：高等代数　　　　科目代码：429

适用专业：数学系各专业　　　　共 1 页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

一、设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ $(n \geq 2)$ 为多项式，且满足

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \mid f_1(x^n) + xf_2(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_n(x^n).$$

证明：存在某一常数 c 使得 $(x-1)^n \mid \prod_{i=1}^{n}(f_i(x)-c)$.

二、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关，试问：常数 k 为何值时，向量组 $k\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_n$，$-\alpha_1 + k\alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_n$，$\cdots$，$-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \cdots + k\alpha_n$ 线性无关？并证明你的结论.

三、设方阵 A 满足 $A^3 + E = 2A$，其中 E 为单位阵. 试证：矩阵 $2A^2 + A - E$ 可逆.

四、设 n 阶实矩阵 A 相似于一个对角阵，且行列式 $|A| < 0$. 证明：必存在实 n 维列向量 $X \neq 0$ 使得 $X'AX < 0$.

五、若 A 和 B 是 n 阶方阵. 求证：AB 与 BA 有相同的特征值.

六、设 A 是 n 阶实对称正定阵，S 是 n 阶反对称实方阵. 证明：$|A+S| \neq 0$.

七、设 V 是复数域上 n 维向量空间. 若 A, B 是两个线性变换，且 $AB = BA$. 若 A 和 B 的特征向量各自都能组成 V 的基. 证明：存在一个基，它的每个向量既是 A 的特征向量，也是 B 的特征向量.

八、证明：设 n 维线性空间的两个子空间之和的维数比其交的维数多 1，则和必与其中一个子空间重合，交必与另一个子空间重合.

九、设 A 是数域 F 上线性空间 R 的一个线性变换，$f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 是数域 F 上两个互质的多项式且 $f(A)\cdot g(A) = 0$. 证明：R 是变换 $f(A)$ 的核与 $g(A)$ 的核的直和.

十、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P, Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

十一、设 A 为 n 阶负定矩阵. 试证明：对任意奇数 k，存在 n 阶负定矩阵 B，使得 $A = B^k$.

注释：以上试题中，一至八题各 15 分，九至十一题各 10 分，满分共计 150 分.