科目名称：数学分析　　　　　　科目代码：328

适用专业：数学系各专业　　　　　　共 5 页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

一 选择题（每小题5分，共计40分；以下各题为单选题，有且仅有一个正确答案。）

1 若 f(x) 为定义在实数域上的任意函数，那末

$$F(x) = f(x) - f(-x)$$

是

(A) 偶函数 (B) 奇函数 (C) 非奇非偶函数 (D) $F(x) = 0$

2 若

导数定义

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

$f'(0) = \dfrac{\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x}{10} = 0$

则

(A) $f'(0) = 0$ (B) $f'(0)$ 不存在 (C) $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

(D) $f'(0) = \infty$

3 若 f(x) 有连续的导函数，且已知 $f(0) = 0, f'(0) = 2$, 则

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x)\,dx}{x^2}$$

的值为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 不存在

4 设 f(x,y) 在区域 D = { (x,y) :　$0 \leqslant y \leqslant x \leqslant a$ } 上连续，则

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy$$

等于

(A) $\int_0^a dy \int_0^y f(x,y)\,dx$　　(B) $\int_0^a dy \int_a^y f(x,y)\,dx$

(C) $\int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx$　　(D) 以上都不对

5 设 f (u ,v) 定义在整个平面上且具有二阶连续偏导数，$u = x^2 + y^2, v = x^2 - y^2$，那末 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 等于

(A) $2x\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$　　(B) $2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

(C) $2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$　　(D) $4xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$

6 已知函数 f (x ,y ,z) 在光滑曲面 D: x = g (y ,z) 上连续，D_{yz} 为 D 在 yz 平面上的投影。若取 D 的后侧，则第二型曲面积分

$$I = \iint_D f(x,\ y,\ z)\,dydz$$

科目名称：数学分析	科目代码：328
适用专业：数学系各专业	共　　页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

与二重积分

$$I^{*}=\iint\limits_{D_{xy}} f(g(y,z),y,z)\,dydz$$

的关系为

(A) $I=I^{*}$　(B) $I=-I^{*}$　(C) $I=\pm I^{*}$

(D) I 和 I^{*} 没有必然的联系

7 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

都发散，则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ v_n$ 必发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 必发散　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 必发散

8 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 x = —2 处收敛，则在 x = 1.5 处

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 不能确定

二 计算（每小题 8 分，共计 40 分；只写出结果，不写过程）

西北大学 2004 年招收攻读硕士学位研究生试题

科目名称：数学分析	科目代码：328
适用专业：数学系各专业	共　　页

<u>*答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效*</u>

1 $I=\int_l \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$，其中 l 是区域 $D=\{(x,y):2\pi<x<3\pi,\ 0<y<\sin x\}$ 的边界的正向。

$\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{array}\right.$　$0<\theta<2\pi$　$0<r<\sqrt{8}$

2 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$，其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成的几何体。

3 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

4 在曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上求出哪样的点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

5 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

三 （10 分）证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\[2mm] 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

在原点处连续，且两个偏导数存在，但在原点不可微。

四 （15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得

$$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$$

证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=0$。

五（15分）证明隐函数存在定理中下列结论：

设 $F(x, y)$ 在区域

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$$

上有连续的偏导数，其中 x_0, y_0, a, b 均为常数，且 $a > 0, b > 0$，$F(x_0, y_0) = 0$，$F_y(x_0, y_0) < 0$。证明：$F(x, y) = 0$ 在 (x_0, y_0) 的某个领域内唯一确定了一个隐函数 $y = f(x)$ 且 $y_0 = f(x_0)$。

六（15分）设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微，$f(0) = 0$，并设有实数 $A > 0$，使得 $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立。证明：在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 恒为 0。

七（15分）证明：若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中稠密，即 $[a, b]$ 的任意子区间都含有 $f(x)$ 的连续点。