西北大学2007年招收攻读硕士学位研究生试题

科目名称：数学分析　　　　科目代号：625

适用专业：数学系　　　　共二页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效，本试题共计150分。

一、单项选择题：（本题共36分，每小题6分）

1. 下列命题成立的是（　）

A. 若数列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，则数列$\{x_n y_n\}$发散

B. 若$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$上单调，则$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$都存在

C. 若$f(x)$在(a,b)内每点连续，则$f(x)$在(a,b)上有界

D. 定义域为$[a,b]$，值域为$[0,1]\cup[2,3]$的连续函数存在且唯一

2. 若$f(x)$在x_0可导，且$f'(x_0)\neq 0$，记$\Delta x = x - x_0$，则当$\Delta x \to 0$时，dy是（　）

A. Δx的高阶无穷小　　　　B. Δx的等价无穷小

C. Δx的同阶无穷小　　　　D. 与Δx不可比较的无穷小

3. 如果$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上（　）

A. 可积　　　　B. 不可积

C. 未必可积　　　　D. 当$|f(x)|$在$[a,b]$上连续时，$f(x)$可积

4. 如果$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$F(x)=\int_a^{x} f(t)dt$在$[a,+\infty)$上（　）

A. 有界　　　　B. 可微

C. 连续可微　　　　D. 必有间断点

5. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径是$R>0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n dt\right)$在$x=R$处（　）

A. 收敛　　　　B. 不收敛

C. 可能收敛，也可能不收敛　　　　D. 绝对收敛

6. 设L：$x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$，正向是逆时针方向，则（　）

A. $\int_L \cos y\, dy > 0$　　　　B. $\int_L \cos y\, dx > 0$

C. $\int_L \cos x\, dx > 0$　　　　D. $\int_L \sin y\, dx > 0$

二、计算题：（本题共 60 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$。

求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right|^{n}$。　（本题 15 分）

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3n+1}$ 的和。（本题 15 分）

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定的函数。

计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。（本题 10 分）。

4. 设 D 是由 $x=0,y=0$ 及 $x+y=1$ 所围区域，求积分 $\iint\limits_{D}\exp\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)dxdy$，

其中 $\exp(t)=e^t$。（本题 10 分）

5. 计算积分

$$I=\iint\limits_{S}x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy$$

其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。（本题 10 分）

三、证明题：（本题共 54 分）

1. 设 $x_n>0$，$y_n=$

$$y_n=\sqrt{x_n+\sqrt{x_{n-1}+\sqrt{x_{n-2}+\cdots+\sqrt{x_1}}}}\,,\ (n=1,2,3,\cdots)$$

证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{y_n\}$ 收敛。（本题 14 分）

2. 设 $f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=f(1)$，证明：对任意自然数 n，$\exists x_n\in[0,1]$，使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$。（本题 15 分）

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$。（本题 10 分）

4. 设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，而 $x_n\in[a,b]$ $(1,2,3,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x)$。（本题 15 分）