西北工业大学

2003 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：数学分析与高等代数(A)　　　　试题编号：331

说　　明：所有试题一律写在答题纸上　　　　第 1 页 共 2 页

一、(10 分)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{n}\right)\right]^n$ $(a\neq 0)$.

二、(10 分)　用致密性定理证明：假定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义；如果对于任意一点 $x_0\in[a,b]$，都存在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得函数 $f(x)$ 在集合 $U(x_0)\cap[a,b]$ 上是有界的，那么函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是有界的.

三、(15 分)　假定 $\phi(z)$ 是可导函数．假设 z 是由方程 $z=x+y\phi(z)$ 确定的隐函数 $(y\,\phi'(z)\neq 1)$．定义

$$u=\int_0^z\frac{\ln(1+xz)}{x}\mathrm{d}x\quad(z>0),$$

求偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

四、(15 分)　求积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}V$，这里

$$\Omega:\ x^2+y^2+z^2\leq 4,\ \ x^2+y^2+(z-2)^2\leq 4.$$

五、(15 分)　求积分

$$I=\oint_{\Gamma}y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z,$$

这里 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 x 轴的正方向看去，Γ 取逆时针方向.

六、(15 分)　假定函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上处处收敛，记

$$R_n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\quad(x\in I).$$

假设对于任意的 n，函数 $R_n(x)$ 在区间 I 上是有界的，并且对区间 I 上任意数列 $\{x_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x_n)=0,$$

证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

西北工业大学

2003 年硕士研究生入学考试试题

七、（15 分）已知 $AX^{*}-B=5A$，其中 X^{*} 表示矩阵 X 的伴随矩阵，而

$$A=\begin{pmatrix}0&0&3&5\\0&0&1&2\\2&-3&0&0\\-5&8&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&3&-11\\0&0&2&-5\\-7&8&0&0\\18&-21&0&0\end{pmatrix}$$

求矩阵 X。

八、（15 分）设四元齐次线性方程组（Ⅰ）为 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=0\end{cases}$，又已知另一四元齐次线性方程组（Ⅱ）的一个基础解系为

$$\beta_1=(4,0,1,-1)^{T},\qquad \beta_2=(2,a,1,1)^{T}$$

问 a 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解。

九、（10 分）设 n 阶方阵 A 满足 $A^{k}\neq O\ (k=1,2,\cdots,n-2)$，$A^{n-1}=O$。

（1） 证明满足上述条件的所有 n 阶方阵彼此相似；

（2） 求 A 的 Jordan 标准形。

十、（15 分）设二次曲面 $ax^2+5y^2+3z^2-2xy+6xz-6yz=2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $4v^2+cw^2=2$，求 a、c 的值及正交矩阵 Q。

十一、（15 分）已知 $R^{2\times2}$ 的线性变换

$$T(X)=\begin{pmatrix}3x_1+x_2+x_3-x_4 & x_1+3x_2-x_3+x_4\\ x_1-x_2+3x_3+x_4 & -x_1+x_2+x_3+3x_4\end{pmatrix},\qquad \forall X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in R^{2\times2}$$

（1） 证明 T 是对称变换；

（2） 求 $R^{2\times2}$ 的一组标准正交基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。