西北工业大学

2003年硕士研究生入学考试试题

试题名称：概率论与数理统计　　　　试题编号：408

说明：所有试题一律写在答卷纸上　　　　共2页第1页

一、（本题满分20分）

1.已知A,B为随机事件，$P(A)=0.7,P(B)=0.4,P(A\bar{B})=0.5$,求$P(B|A\cup\bar{B})$.

2.每次同时掷两枚骰子，点数之和为7或10可获奖品，试求在10次独立的投掷中，至少有三次获奖的概率。

二、（本题满分20分）设随机变量X与Y独立同服从标准正态分布$N(0,1)$，令$U=X^2+Y^2,V=\dfrac{X}{Y}$，

1. 试求(U,V)的联合密度函数；
2. 问U与V是否相互独立，为什么？
3. 求$P(0<U\le 1,\ V>0)$.

三、（本题满分20分）设有N个战士，每人有一支步枪，将这些步枪集中放在一起，充分混合后，每位战士再随机的从中任选一支步枪，试求选对自己的步枪的人数的数学期望与方差。

四、（本题满分20分）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布的随机变量，其密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$，令：$X_{(n)}=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$

1. 试求$X_{(n)}$的密度函数；
2. 令$T_n=CX_{(n)}$，试求使$E(T_n-\theta)^2$达到最小的C的值；
3. 证明$T_n\xrightarrow{P}\theta$.

五、（本题满分20分）设X_n表示n次独立的贝努里试验中事件A出现的次数，$P(A)=p$,令$Y_n=\dfrac{X_n-np}{[np(1-p)]^\alpha}$，

1. 若$\alpha>\dfrac{1}{2}$,试证明$Y_n\xrightarrow{P}0$;
2. 若$\alpha=\dfrac{1}{2}$时，你有何结论？试用特征函数的方法证明你的结论。

六、（本题满分20分）设总体X服从伽玛分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的简单随机样本，X的密度函数为：

$$f(x;\ \alpha,\ \lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$\alpha>0$为已知常数，$\lambda>0$为未知参数，试求：

1. λ的矩估计量；
2. $\eta=\dfrac{1}{\lambda}$的最大似然估计量$\hat{\eta}_n$；
3. $\hat{\eta}_n$是否是η的有效估计量？为什么？

七、（本题满分 15 分）

某台机器加工某种零件，规定零件长度为 100cm，标准差不得超过 2cm,每天定时检查机器的运行情况，某日抽取 10 个零件，测得平均长度 $\bar{x}=102cm$,标准差$s_n^*=3cm$, 设加工的零件长度服从正态$N(\mu,\sigma^2)$分布，

1.问该日机器工作是否正常（$\alpha=0.05$)？

2.求μ的置信度为 0.95 的置信区间。

已知$t_{0.025}(9)=2.2622, t_{0.05}(9)=1.8331, \chi^2_{0.05}(9)=16.9, \chi^2_{0.025}(9)=19.0$.

八、（本题满分 15 分）设有线性模型

$$Y_1=a+\varepsilon_1$$
$$Y_2=a+b+\varepsilon_2$$
$$Y_3=a-b+\varepsilon_3$$
$$Y_4=a+2b+\varepsilon_4$$
$$Y_5=a-2b+\varepsilon_5$$
$$Y_6=a+3b+\varepsilon_6$$
$$Y_7=a-3b+\varepsilon_7$$

其中$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6,\varepsilon_7$相互独立且同服从正态$N(0,\sigma^2)$分布，

1. 试求a,b的最小二乘估计$\hat{a},\hat{b}$；
2. 试求$\hat{Y}=\hat{a}-4\hat{b}$的概率分布。