西北工业大学
2007年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等代数（A卷） 试题编号：829
说　　明：所有答题一律写在答题纸上

一、（本题满分15分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&4&0&0\\0&0&5&1\\0&0&7&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&1&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}$，且 $AXA-\frac{1}{2}B^{*}A=XA$，求矩阵 X。

二、（本题满分10分）

设 n 阶方阵 A 的互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\ (2<m<n)$，对应的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$。证明：向量组

$$\beta_1=A(\alpha_1+\alpha_2),\beta_2=A(\alpha_1+\alpha_3),\cdots,\beta_{m-1}=A(\alpha_1+\alpha_m),\beta_m=A(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$$

线性无关的充要条件是 $\lambda_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,m)$。

三、（本题满分20分）

讨论线性方程组 $Ax=b$ 的可解性，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&3&-3\\3&2&c&-2\\4&3&5&a\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

在有无穷多解时求通解（要求用向量形式表示）。

四、（本题满分10分）

设4阶方阵 A 的各行元素之和为1，各列元素之和为2，且非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有3个线性无关的解向量，证明 A 相似于对角阵。

西北工业大学

2007年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等代数（A卷）　　　　试题编号：829
说　　明：所有答题一律写在答题纸上　　　　第 2 页 共 3 页

五、（本题满分 20 分）

已知4元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2$$

其中 $\bar{x}=\dfrac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$。

1）写出二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

2）求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型 f 为标准形。

六、（本题满分 20 分）

设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 是数域 $\mathbf{K}$ 上矩阵空间 $\mathbf{K}^{2\times2}$ 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在基

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}-3&-3\\-3&-5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}7&2\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_4=\begin{pmatrix}11&3\\0&0\end{pmatrix}$$

下的坐标，$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标，且

$$y_1=3x_1-5x_2,\quad y_2=-x_1+2x_2,\quad y_3=2x_3+3x_4,\quad y_4=5x_3+8x_4$$

1）求由基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 到基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$ 的过渡矩阵；

2）求基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$；

3）求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标。

七、（本题满分 15 分）

设多项式空间 $\mathrm{P}[t]_3=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \mid a_i\in\mathbf{R}\}$ 中的线性变换为

$$T(f(t))=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)t+(a_2-a_0)t^2+(a_3-a_1)t^3$$

求 $\mathrm{P}[t]_3$ 的一个基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

西北工业大学

2007年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等代数（A卷）　　　　　　　　试题编号：829
说　明：所有答题一律写在答题纸上　　　　　

八、（本题满分 10 分）

设 A 是 6 阶矩阵，A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

A 的最小多项式为

$$m(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$$

1）求 A 的所有不变因子；
2）写出 A 的 Jordan 标准形。

九、（本题满分 15 分）

设 A,C 分别为 m 阶，n 阶实对称矩阵，且 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ B^{T} & C \end{pmatrix}$ 为正定矩阵。

1）计算 $P^{T}MP$，其中 $P=\begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^{-1}B^{T} & E_n \end{pmatrix}$；

2）证明：$A-BC^{-1}B^{T}$ 为正定矩阵。

十、（本题满分 8 分）

设线性空间 V 的线性变换 T 和 S 满足 $TS=ST$，又设 λ_0 是 T 的特征值。证明：T 的特征子空间 $V_{\lambda_0}=\{\alpha \mid T(\alpha)=\lambda_0\alpha,\ \alpha\in V\}$ 是 S 的不变子空间。

十一、（本题满分 7 分）

设 T 和 S 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，且满足

$$[T(\alpha),\beta]=[\alpha,S(\beta)] \qquad (\forall\alpha,\beta\in V)$$

1）若 T 和 S 在 V 的标准正交基下的矩阵分别是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，证明：$B=A^{T}$；

2）证明：$R(S)\perp N(T)$，其中 $R(S)$ 为 S 的值域，$N(T)$ 为 T 的核。