(试题附在考卷内交回)

成 都 理 工 大 学

二〇〇三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学(二)

试题适用专业：　　　　　　　　　　　　　　　　（试题共 3 页）

注意：（1）本卷共十二个大题，满分 150 分；

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tanx，cotx，arctanx 和 arccotx 表示；

（3）回答填空题和选择题时，可直接在题卷上完成，其余大题必须在答卷上完成，并请注明题号.

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

1．设函数 $f(x)=\sin x, f(\varphi(x))=1-x^2$，且 $|\varphi(x)|\leqslant 1$，则函数 $y=\varphi(x)$ 的定义域是 ~~$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$~~ $[-\sqrt{1+\sin 1},-\sqrt{1-\sin 1}]\cup[\sqrt{1-\sin 1},\sqrt{1+\sin 1}]$

$\text{原式}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}$

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]=$ $\frac{1}{3}$.

$y''=\frac{e^x(x^2+10x+23)}{(x+3)^3}$

3．曲线 $y=\frac{e^x}{3+x}$ 的凹区间是 $(-3,+\infty)\cup(-5-\sqrt{2},-5+\sqrt{2})$

$\int\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx$

4．不定积分 $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=$ $\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}+C$.

5．微分方程 $xdy=ydx+xdx$ 的通解是 $x\ln x+Cx$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1．设函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处都取极小值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 x_0 处(C)

A．必取极大值；　　　　B．必取极小值；

C．必取极值；　　　　　D．是否取极值不能确定.

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}x+\sin x, & x\ge 0,\\ e^{2x}-1, & x<0,\end{cases}$ 下列说法正确的是（ A ）

A．$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；　B．$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导；×

C．$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；　D．$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

3．设 $I_1=\int_{-1}^{1}x\sin x\mathrm{d}x$ >0，$I_2=\int_{-1}^{1}x\cos x\mathrm{d}x$，$I_3=\int_{0}^{1}x\sin x\mathrm{d}x$，则（ B ）

$2I_3$　　0

A．$I_1>I_2>I_3$；　B．$I_1>I_3>I_2$；　C．$I_3>I_2>I_1$；　D．$I_2>I_3>I_1$.

4．设函数 $f(x)=x(x+1)(2x+1)(3x-1)$，则在区间（-1，0）内方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为（　）　$0,\ |\ -1\ |\ -\frac{1}{2}\ |\ \frac{1}{3}$

A．0；　B．1 个；　C．2 个；　D．3 个.

5．已知函数 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程的两个解，则此微分方程是（ A ）

A．$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$；　B．$y''-y'-2y=2xe^x-e^x$；

C．$y''+y'-2y=3e^x+4e^{2x}$；　D．$y''+y'-2y=3e^x-2e^{-x}$.　——48 min

三、（本题满分 8 分）

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x\ln(1+x)}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

四、（本题满分 8 分）

求不定积分 $\int\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x\,dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\int\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx=\int x\,d\tan\frac{x}{2}-2\int\dfrac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=x\tan\frac{x}{2}-2\int\tan\frac{x}{2}d\frac{x}{2}-2\int\dfrac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

五、（本题满分 10 分）　$=x\tan\frac{x}{2}+2\ln|\cos\frac{x}{2}|-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C=x\tan\frac{x}{2}+C$

设 $y'(x)=\arctan(x-1)^2$，$y(0)=0$，求 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$.

$\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1 y(x)d(x-1)=(x-1)y(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)y'(x)dx$

$=0-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\arctan(x-1)^2d(x-1)^2$　令 $z=(x-1)^2$

$=+\frac{1}{2}\int_0^1\arctan z\,dz$

$=\frac{1}{2}\left(z\arctan z\Big|_0^1-\int z\,d\arctan z\right)$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}$

六、（本题满分 10 分）

设 $\begin{cases}x=\cos(t^2),\\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$\frac{dy}{dt}=\cos t^2-2t^2\sin t^2-2t\cdot\frac{1}{2t}\cdot\cos t^2=-2t^2\sin t^2$　　$\frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2t^2\sin t^2}{-2t\sin t^2}=t$　　$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}=1$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}\div\frac{dx}{dt}=\frac{1}{-2t\sin t^2}=-\frac{1}{2t\sin t^2}$

七、（本题满分 10 分）

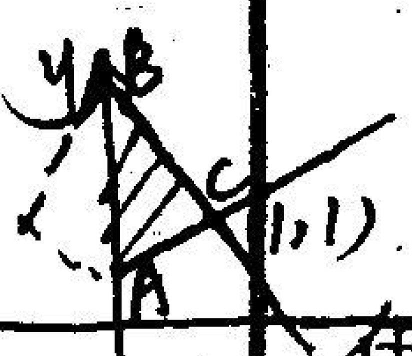
求常数 a,b，使函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 可导，并求出 $f'(x)$.

八、（本题满分 10 分）

计算定积分 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\max\{1,2x,x^2\}$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$

$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2x & \frac{1}{2}<x\le 2\\ x^2 & 2<x\le 3\end{cases}$ $\int_0^3 f(x)$

九、（本题满分 12 分）



已知曲线 $y=f(x)$ 上任一点 (x,y) 处切线的斜率等于 $\dfrac{2y}{x}$，求由曲线 $y=f(x)$ 在切点（1，1）处的切线、法线及 y 轴所围平面图形的面积，并求此平面图形绕 y 轴旋转一周的旋转体体积.

$f'(x)=\frac{2y}{x}$ $f'(1)=2$ $f(1)=1$

切线 $y=2x-1$ 法线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ $S=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2}+1)\times1$

十、（本题满分 12 分） ~~$V=V_1+V_2=\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(y+1)dy+\pi\int_1^{\frac{3}{2}}(3-2y)dy=\frac{\pi}{2}[\frac{1}{2}y^2+y]_{-1}^{1}+\pi[3y-y^2]_1^{\frac{3}{2}}$~~

设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，已知曲线 $y=f(x)$ 在切点（1，0）处的切线平行于直线 $y=x$，求曲线 $y=f(x)$ 的方程.

$f(1)=0$ $f'(1)=1$ 截距 $\int_0^1 f(t)dt$ $y=x-1$

十一、（本题满分 10 分）

证明：当 $x>0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{1+x}$.

$f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x})$ 当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ∴ $f(x)>0$ ∴

十二、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，$f(a)f(b)>0$，且 $f(a)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

证明：不妨设 $f(a)>0$，$f(b)>0$，根据 $f(a)\int_a^b f(x)dx<0$ 则有 $\int_a^b f(x)dx<0$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少存在两个零点 x_1,x_2，则 $f(x_1)=f(x_2)=0$

∵ $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 上可导.

由罗尔定理得 至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\in(a,b)$.

使 $f'(\xi)=0$.

$\sum nx^n$, $\sum\frac{x^n}{n}$