

(此卷不得填写考号、姓名, 试题附在考卷内交回)

59

成都理工大学

二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称: 高等数学(二)

试题适用专业:

(试题共 5 页)

考生注意:

- (1) 本卷共十个大题, 满分 150 分, 答题时间为 180 分钟;
- (2) 根据国家标准, 试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示;
- (3) 回答填空题和选择题时, 可直接在题卷上完成; 其余大题必须在答卷上完成, 并注明题号。

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)

1. 设 $f'(\ln x) = 1 + x$, 则 $f(x) =$ _____。

2. 设 $y = f(e^x)e^{f(x)}$, 则 $y' =$ _____。

3. 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$; 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} \quad \text{在 } x=0 \text{ 处连续, 则常数 } A = \text{_____}。$$

4. 设曲线 L 方程为 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, 则 L 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为

_____。

5. $\int_{-a}^a x[f(x) + f(-x)]dx =$ _____。

6. 已知函数 $\varphi(x)$ 满足关系式 $\int_0^x t\varphi(t)dt = x^2 + \varphi(x)$, 则 $\varphi(x) =$ _____。

二、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分)

1. 设函数 $f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2h}}$, 则函数 $f(x)$: ()

- A. 不存在间断点
B. 存在间断点 $x=0$
C. 存在间断点 $x=1$
D. 存在间断点 $x=-1$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 在开区间 (a, b) 内可导, 则: ()

- A. 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$
B. 对任何 $\xi \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$

C. 当 $f(a) = f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$

D. 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个量比其他三个更高阶的无穷小量? ()

- A. x^2 B. $1 - \cos x$ C. $\sqrt{1-x^2} - 1$ D. $x - \tan x$

4. 若 $f(-x) = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), 在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x) > 0$ 且 $f''(x) < 0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内有 ()。

- A. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$
B. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$
C. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$
D. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

5. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则

()

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线的拐点

6. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$,

$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则 () 成立。

A. $N < P < M$

B. $M < P < N$

C. $N < M < P$

D. $P < M < N$

7. 设两曲线 $y_1 = f(x)$ 与 $y_2 = g(x)$ 相交于点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 其中 $x_1 < x_2$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 。由两曲线所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积是 ()。

A. $\int_{x_1}^{x_2} \pi [f(x) - g(x)]^2 dx$

B. $\int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \pi g^2(x) dx$

C. $\int_{x_1}^{x_2} \pi |f^2(x) - g^2(x)| dx$

D. $\int_{x_1}^{x_2} [\pi f(x) - \pi g(x)]^2 dx$

8. 微分方程 $y''' = y''$ 的通解是 ()。

A. $e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

B. $C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

C. $e^x (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)$

D. $C_1 e^x + C_2 x + C_3$

三、(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 3)^{20} \cdot (3x - 5)^{30}}{(4x^2 + 3)^{15} \cdot (3x + 7)^{40}}$

四、(本题满分 8 分)

计算函数的导数: $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$

五、(本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

六、(本题满分 10 分)

设三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 当 $x = -1$ 时, 有极大值 5, 当 $x = 1$ 时, 有极小值 1, 求 a 、 b 、 c 、 d 的值。

七、(本题满分 10 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x) & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt & x > 0 \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和

可导性。

八、(本题满分 12 分)

设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x=a$, $x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域, D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y=0$, $x=a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_2 .

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值。

九、(本题满分 12 分)

设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个特解, 求此方程满足初始条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解。

十、(本题满分 12 分)

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$ (万元/吨), x 为销售量 (单位: 吨) 商品的成本函数是 $c = 3x + 1$ (万元)

(1) 若每销售一吨商品, 政府要征税 t (万元), 求该商家获得最大利润时的销售量。

(2) t 为何值时, 政府税收总额最大