电子科技大学

2001年攻读硕士学位研究生入学试题

科目名称：**数学分析**

注：<u>应届生必做一至十二题，在职人员必做一至十题并在十一至十四题中选做两题</u>

一、填空题（每小题3分，共15分）

1\. 设 $f(\frac{1}{x}) = x(1+\sqrt{1+x^2})\quad (x>0)$，则 $f(x)$ = ________________；

2\. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}$ = ____________，a，b，c，h，k 均为常数，a、$h\neq 0$；

3 $\displaystyle\int\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$ = __________________________；

4\. 方程 $F(x+zy^{-1}, y+xz^{-1})=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ = __________________________；

5\. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 的和等于 ______________。

二、选择题（每小题3分，共15分）

1\. 已知 $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处（　　）；

① 极限存在，但不连续；　② 连续，但不可导；
③ 可导；　④ 可导，且导函数连续。

2\. 方程 $2^x-1-x^2=0$ 有（　　）；

① 一个实根；② 二个实根；③ 三个实根；④ 四个实根。

3. $f(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，$g(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}dt$，当 $x\to 0$ 时，

则 f（x）是 g（x）的（　　）；

① 高阶无穷小；　　　　② 低阶无穷小；
③ 同阶但不等价无穷小；　　④ 等价无穷小。

3. $f(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，$g(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}dt$，当 $x\to 0$ 时，

则 f（x）是 g（x）的（　　）；

① 高阶无穷小；　　　　② 低阶无穷小；
③ 同阶但不等价无穷小；　　④ 等价无穷小。

4. u_n，v_n 符合（　　）条件，可由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，推出 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散。

① $u_n \leqslant v_n$； ② $u_n \leqslant |v_n|$； ③ $|u_n| \leqslant |v_n|$； ④ $|u_n| \leqslant v_n$。

5. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点（0，0）处（　　）。

① 极限存在，但不连续；　　②偏导数不存在；
③ 对每个变量 x，y 连续，但不关于二变量连续；④可微。

三、（6 分）用“$\varepsilon-\delta$”定义证明 $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续但不一致连续。

四、（6 分）计算积分 I $=\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 C 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 正向。

五、（6 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个正数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots+a_k^{\ n}}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_k)$$

六、（7 分）若在 $[a, b]$ 上，$|f'(x)| \geqslant |g'(x)|$，$f'(x) \neq 0$，则 $|\Delta f(x)| \geqslant |\Delta g(x)|$；并证明在 $[\frac{1}{2}, x]$ 上，$\Delta \arctan x \leqslant \Delta \ln(1+x^2)$；由此证明在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上，以下不等式成立：$\arctan x - \ln(1+x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2$。

七、（7 分）求曲面 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 所围立体的体积。

八、（7 分）求 $I = \int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$ （$a>0$，$b>0$）。

九、（7 分）在椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 上任意点作切线，求这些切线中与坐标轴所围成的三角形面积的最小值。

十、（8 分）计算 $I = \oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，L 为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$（$a>0$，$h>0$）的交线，从 ox 的正向看去，交线按逆时针方向。

以下题目应届生做第十一、十二题，在职考生任选两题：

十一、（8 分）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛，但对于任何 x 并非绝对收敛。而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 绝对收敛，但并不一致收敛。

十二、（8 分）求 $I(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)dx$，其中 $|\theta|<1$。

十三、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，$0<a<b$，证明：

在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=\xi(\ln\frac{b}{a})f'(\xi)$，$a<\xi<b$。

十四、（8 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，求积分

$$I=\oint_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$$

其中 L 是从 $A(3,\frac{2}{3})$ 到 $B(1,2)$ 的直线段。