电子科技大学

2002年硕士研究生入学考试试题

考试科目：线性代数

注：应届生做(一)—(八)题；往届生做(一)—(六)题，然后在(七)—(十)题中任选两题来做。

(一)(10分)

设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$ $(i=1,2,\cdots,r,r<n)$是线性无关的n维实向量，且$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$的线性相关性。

(二)(10分)

已知$\xi_1=(-9,1,2,11)^T$，$\xi_2=(1,-5,3,0)^T$，$\xi_3=(-7,-9,24,11)^T$是方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1\\3x_1+2x_2+b_3x_3+b_4x_4=d_2\\9x_1+x_2+4x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$$

的三个解，求此方程组的通解。

(三)(10分)

证明：(1) $A^2=A$，则$A=E$或$|A|=0$；

(2) A是三阶正交矩阵，且$|A|=1$，则$\lambda=1$是A的特征值。

(四)(10 分)

$A=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 5 & b & 3\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$有特征值$\lambda=\pm1$，问$A$能否与对角阵相似，试说明之。

(五)(15 分)

(1) $A^2=A$，$B^2=B$，$(A+B)^2=A+B$，证明：$AB=0$；

(2) $AA^T=E$，$|A|<0$，求$|A+E|$。

(六)(15 分)

(1) 已知$A^T=A$且$AB+B^TA$正定，证明A可逆；

(2) 证明：当$\lambda>0$时，$B=\lambda E+A^TA$必为正定矩阵。

(七)(15 分)

$A\in R^{n\times n}$且$A^2=A$，证明A与对角矩阵相似。

(八)(15 分)

证明：任一可逆实矩阵都可以表为一个正交矩阵与一个正定矩阵的乘积。

(九)(15 分)

设$A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$，$|A|=-1$，$A^*$有一个特征值$\lambda_0$，其对应的特征向量为$\alpha=(-1,-1,1)^T$，求$a,b,c,\lambda_0$的值。

(十)(15 分)

A,B是n阶方阵，$r(A)+r(B)<n$，证明：A,B有公共的特征向量。