

# 电子科技大学

## 2004 年软件工程硕士入学考试数学试题

### 考试科目：数学

一、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x^2} - 1}{x^2 \tan x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设  $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ , 则  $dy|_{x=\frac{4}{\pi}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3.  $\int_{-1}^1 x(1+x^5)(e^x - e^{-x})dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设  $4 \times 4$  矩阵  $A = (\alpha, r_2, r_3, r_4), B = (\beta, r_2, r_3, r_4)$ , 其中  $\alpha, \beta, r_2, r_3, r_4$  均为 4 维列向量, 且已知行列式  $|A| = 4, |B| = 1$ , 则行列式  $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列各式中正确的是( ).

(A)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$  (B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1;$  (C)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e;$  (D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 1.$

2. 设  $f(x)$  满足等式  $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$ , 则  $f(x) = ( ).$

(A)  $e^x \ln 2;$  (B)  $e^{2x} \ln 2;$  (C)  $e^x + \ln 2;$  (D)  $e^{2x} + \ln 2.$

3. 设函数  $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$ , 而  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, (-\infty < x < +\infty)$ , 其中

$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, 3, \dots)$ , 则  $S(-\frac{1}{2}) = ( ).$

(A)  $-\frac{1}{2};$  (B)  $-\frac{1}{4};$  (C)  $\frac{1}{4};$  (D)  $\frac{1}{2}.$

4. 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$  的值为( ).

(A) 12; (B) -16; (C) 16; (D) -12.

5. 设  $n$  阶方阵  $A$  与  $B$  有相同的特征值, 且  $A, B$  都有  $n$  个线性无关的特征向量, 则 ( ).

(A)  $A = B$ ; (B)  $A \neq B$ , 但  $|A - B| = 0$ ; (C)  $A$  相似于  $B$ ; (D)  $A$  与  $B$  不一定相似, 但  $|A| = |B|$ .

三、(7 分) 设曲线  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \sin t + \cos^2 t - 1 + \pi \\ t \cos y + ye' = \pi \end{cases}$  确定, 求曲线  $y = y(x)$

在  $t = 0$  所对应点处的切线方程.

四、(7 分) 试证: 当  $0 < x < 1$  时,  $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ .

五、(7 分) 求曲线  $(y-2)^2 = x-1$  与抛物线上纵坐标  $y_0 = 3$  处的切线及  $x$  轴围成的平面图形的面积.

六、(7 分) 计算  $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy$ .

七、(7 分) 计算曲面积分  $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ , 其中  $S$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的下侧.

八、(7 分) 设曲线  $L$  位于  $xOy$  平面第一象限内并经过点  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ,  $L$  上任意一点  $M$  的切线与  $y$  轴交于点  $A$ , 已知切点  $M$  到点  $A$  的距离等于原点  $O$  到点  $A$  的距离, 求曲线方程.

九、(7 分) 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$  是绝对收敛还是条件收敛.

十、(7 分)  $\lambda$  取何值时, 方程组  $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$  无解, 有唯一解, 有无穷多解.

十一、(7 分) 求方阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值与特征向量.

十二、(7 分) 证明: (1) 设  $A, B$  为  $n$  阶正定矩阵, 则  $BAB$  也是正定矩阵;

(2) 设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 且  $r(A) = n$ , 则  $A^T A$  是正定矩阵.