电子科技大学

2004 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：314 高等数学

一、填空题（本题满分 24 分，每小题 4 分）

（1）若 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$ ________.

（2）若当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于________.

（3）$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$ ________.

（4）$\int\frac{x}{x^4+2x^2+5}dx=$ ________.

（5）微分方程 $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ 的通解为________.

（6）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛区间是________.

二、单项选择题（本题满分 24 分，每小题 4 分）

（1）当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）.

（A）无穷小　（B）无穷大

（C）有界，但不是无穷小　（D）无界，但不是无穷大

（2）设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有（　　）.

（A）$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　（B）$f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C）$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　（D）$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

（3）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则　　　　（　　）.

（A）$x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）$x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）（$a,f(a)$）是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，（$a,f(a)$）也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（4）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，又设

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处　　　　（　　）.

（A）不连续

（B）连续但不可导

（C）可导，但 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

（D）可导，且 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

（5）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，

$\dfrac{2+ay^2f(xy)}{y}dx+\dfrac{x[y^2f(xy)-b]}{y^2}dy$ 为某函数的全微分，则　　　　（　　）.

（A）$a=1$，$b=2$　　　　（B）$a=2$，$b=1$

（C）$a=-1$，$b=2$　　　　（D）$a=2$，$b=-1$

（6）设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)[1+(\cos x)\sin|x|]$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）.

（A）充分必要条件　　　　（B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件　　　　（D）既非充分又非必要条件

三、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，计算极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt$.

314 高等数学 共4页 第2页

四、（本题满分 9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D x\left[1+yf(x^2+y^2)\right]dxdy$

其中：D 由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 所围成，$f(u)$ 连续函数.

五、（本题满分 9 分）

计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega y^2 dV$，其中 Ω：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(0\le y\le b)$ 及 $y=0$ 所围成.

六、（本题满分 8 分）

设 $z=f(x^2+y^2,\dfrac{y}{x})$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

七、（本题满分 12 分）

设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

八、（本题满分 12 分）

若 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）内具有一阶连续导数，L 为上半平面（$y>0$）内的有向分段光滑曲线，其起点为（a，b），终点为（c，d）.

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]dy$$

（1）证明 I 与 L 形状无关；
（2）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

九、（本题满分 9 分）

设 $f(x)$ 在[2，4]内可导，且 $f(2)=\int_3^4 (x-1)^2 f(x)\,dx$，试证：在（2，4）内至少存在一点 $x=\xi$，使得

高等数学共4页 第3页

$$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi).$$

十、（本题满分 12 分）

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\,dS$

其中 Σ：球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\quad(R>0)$，$a$、$b$、$c$、$d$ 为常数.

十一、（本题满分 11 分）

在密度 $\mu=1$，半径为 R 的球体内挖去一个半径为 $\dfrac{R}{2}$ 且与原球内切的球体，求剩余部分对两球公共直径的转动惯量.

十二、（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 在[0，1]可导，$f(0)=0$，$0<f'(x)\le 1$，求证：

$$\left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 \ge \int_0^1 f^3(x)\,dx.$$

高等数学共4页 第4页